SUPPLÉMENT

A L'ESSAI

SUR LA THÉORIE

DES NOMBRES,

SECONDE ÉDITION.

FÉVRIER 1816.



AVIS.

Ce Supplément est divisé en trois chapitres :

Le chapitre I offre les moyens de décomposer un nombre donné en quatre carrés, tels que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné compris entre certaines limites. Ce problème sert d'introduction au chapitre suivant.

Le chapitre II a pour objet la démonstration générale du théorème de Fermat sur les nombres polygones, et de plusieurs théorèmes analogues. Cette démonstration est fondée sur les mêmes principes que celle dont la découverte récente est due à M. Cauchy; mais elle en diffère à plusieurs égards, et elle ne suppose démontré que le théorème relatif aux nombres triangulaires, qui est le premier cas du théorème général.

Enfin le chapitre III contient deux méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques. Je donne ces méthodes comme nouvelles, parce que je ne connais aucun auteur qui en ait fait mention jusqu'ici. Lagrange qui avait, comme on sait, une grande érudition mathématique, n'en parle nulle part dans son Traité de la Résolution des Equations numériques; s'il avait eu connaissance de ces méthodes, je pense qu'il n'aurait pas dit expressément que le problème énoncé pag. x de l'Introduction, était resté jusque-là sans solution.

SUPPLÉMENT



A L'ESSAI

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES.

§ I. *Sur les moyens de décomposer un nombre donné en quatre carrés, de manière que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné.*

(1) Il s'agit en général de satisfaire aux deux équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v, \end{aligned}$$

dans lesquelles a et b sont des nombres donnés, et où l'on suppose les quatre racines s, t, u, v positives.

J'observe d'abord que $x^2 + x$ étant toujours un nombre pair, il faut que $a+b$ soit aussi un nombre pair; ainsi les nombres donnés a et b devront être *de la même espèce*, c'est-à-dire tous deux pairs, ou tous deux impairs.

En second lieu, si les quatre nombres s, t, u, v étaient égaux, on aurait $a = 4s^2$, $b = 4s$, d'où $b = \sqrt{4a}$; et si, de ces quatre nombres, trois étaient nuls, on aurait $a = s^2$, $b = s$, ce qui donnerait $b = \sqrt{a}$; donc en général b doit toujours être compris entre les limites $\sqrt{a}$ et $\sqrt{4a}$.

Ces conditions ne sont pas les seules qui doivent avoir lieu pour que le problème soit possible; mais avant de le considérer dans toute

sa généralité, nous examinerons d'abord le cas où l'un des nombres s, t, u, v serait zéro.

(2) Nous aurons, dans ce cas, à résoudre les deux équations

$$(2) \qquad \begin{aligned} a &= t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= t + u + v, \end{aligned}$$

et voici les conditions de leur possibilité.

1°. Il faut que a ne soit pas de la forme $4^{\lambda}(8n+7)$; car on sait qu'aucun nombre de cette forme n'est la somme de trois carrés.

2°. Le nombre b doit toujours être de même espèce que a; mais il faudra de plus, dans ce cas, que b soit compris entre les limites $\sqrt{a}$ et $\sqrt{3a}$. En effet, si les trois nombres t, u, v étaient égaux, on aurait $a = 3t^2$, $b = 3t$, ce qui donnerait $b = \sqrt{3a}$; c'est la plus grande valeur de b; la plus petite est, comme dans le cas général, $b = \sqrt{a}$.

Cela posé, des trois nombres t, u, v, l'un au moins sera de même espèce que a. Soit t ce nombre, les deux autres u et v devront être tous deux pairs ou tous deux impairs. Faisant donc $u + v = 2p$, $u - v = 2q$, ce qui donne $u = p + q$, $v = p - q$, $t = b - 2p$, il restera à satisfaire à l'équation $a = (b - 2p)^2 + (p + q)^2 + (p - q)^2$, ou à la suivante :

$$\frac{3a - b^2}{2} = (3p - b)^2 + 3q^2.$$

De là on voit que la troisième condition nécessaire pour la possibilité de la solution, est que le nombre $\frac{3a - b^2}{2}$ se réduise à la forme $x^2 + 3y^2$, ce qui aura lieu si $\frac{3a - b^2}{2}$ n'a que des facteurs simples de la forme $6n + 1$, auxquels peuvent se joindre le facteur 3, si b est divisible par 3, et le facteur 4, si a est de la forme $8n+3$, ou si a est divisible par 4^{λ}, auquel cas b doit être divisible par 2^{λ}.

Ayant donc fait $\frac{3a - b^2}{2} = f^2 + 3g^2$, on en tirera $q = g$, $p = \frac{b \pm f}{3}$, et si les trois valeurs $t = b - 2p$, $u = p + q$, $v = p - q$, sont toutes positives, on aura la solution des équations (2).

(3) *Exemple I.* Soit $a = 678$, $b = 40$, les deux premières conditions seront satisfaites; on aura ensuite $\frac{1}{2}(3a - b^2) = 217 = 7.31$, et

puisque les facteurs 7 et 31 sont de la forme $6n+1$, la troisième condition est encore remplie.

Il reste à mettre 7.31 sous la forme f^2+3g^2, ce qu'on peut faire de deux manières, soit par les valeurs $f=5$, $g=8$, soit par les valeurs $f=13$, $g=4$; et parce que, dans les deux cas, on trouve des valeurs positives pour les indéterminées t, u, v, il en résulte les deux solutions suivantes :

$$\begin{cases} 678 = 10^2+23^2+7^2 \\ 40 = 10+23+7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 678 = 22^2+13^2+5^2 \\ 40 = 22+13+5 \end{cases}$$

(4) *Exemple II.* Soit $a=8003$, $b=121$, les deux premières conditions sont remplies; la troisième l'est également, puisqu'on a $\frac{1}{4}(3a-b^2)=4684=4.1171$, et que 1171 est un nombre premier de la forme $6n+1$. Ce nombre peut se mettre sous la forme $32^2+3.7^2$, et son produit par 4 ou $1^2+3.1^2$, prend les deux formes $53^2+3.25^2$ et $11^2+3.39^2$; mais ces deux formes ne conduisent qu'à une seule solution, laquelle est

$$\begin{aligned} 8003 &= 83^2+33^2+5^2, \\ 121 &= 83+33+5. \end{aligned}$$

(5) Au moyen des formules précédentes on pourra, dans beaucoup de cas, non-seulement décomposer en trois carrés un nombre donné qui n'est pas de la forme $4^i(8n+7)$, mais de plus, faire ensorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre donné.

Si on veut décomposer un nombre donné N en trois triangulaires dont les côtés pris ensemble fassent une somme donnée c, il faudra satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} N &= \frac{x^2+x}{2}+\frac{y^2+y}{2}+\frac{z^2+z}{2}, \\ c &= x+y+z. \end{aligned}$$

Or il est visible que ce problème est renfermé dans celui que nous venons de résoudre. Il faudra faire $a=8N+3$, $b=2c+3$, et après avoir trouvé les valeurs de t, u, v, on en déduira celles de x, y, z, savoir, $x=\frac{t-1}{2}$, $y=\frac{u-1}{2}$, $z=\frac{v-1}{2}$.

Par exemple, soit $N=1000$ et $c=59$, on aura $a=8003$ et $b=121$, ce qui donnera, d'après l'exemple II, la solution $x=41$,

$y=16$, $z=2$. On a en effet,

$$1000=\frac{41.42}{2}+\frac{16.17}{2}+\frac{2.3}{2},$$
$$59=41+16+2.$$

(6) Venons maintenant à la résolution générale des équations (1); elles donnent d'abord ce résultat remarquable,

$$4a-b^2=(s+t-u-v)^2+(s+u-t-v)^2+(s+v-t-u)^2;$$

d'où l'on voit que $4a-b^2$ doit être décomposable en trois carrés, et qu'ainsi une troisième condition nécessaire pour la possibilité du problème, est que $4a-b^2$ ne soit pas de la forme $4^k(8n+7)$.

Si $4a-b^2$ n'est pas de cette forme, il sera toujours possible de satisfaire, d'une ou de plusieurs manières, à l'équation

$$4a-b^2=x^2+y^2+z^2;$$

on regardera donc x, y, z comme connus, et en supposant que s, t, u, v soient rangés par ordre de grandeur, ainsi que x, y, z, on aura, pour déterminer s, t, u, v, les quatre équations

$$\begin{aligned} s+t+u+v&=b,\\ s+t-u-v&=x,\\ s+u-t-v&=y,\\ s+v-t-u&=\pm z.\end{aligned}$$

On a mis dans la troisième $\pm z$, parce que, quoiqu'on ait par hypothèse $s>t>u>v$, il n'arrivera cependant pas toujours que la somme $s+v$ soit plus grande que $t+u$.

Il faut maintenant que les valeurs de s, t, u, v, déduites des équations précédentes, soient positives, sans quoi le problème ne serait qu'improprement résolu. Or cette condition peut toujours être remplie en limitant convenablement la valeur de b. Pour le faire voir, il faut examiner successivement le cas où a et b sont impairs, et celui où ils sont pairs.

Premier cas, a *et* b *impairs.*

(7) Dans ce cas, $4a-b^2$ sera de la forme $8n+3$, et on pourra toujours satisfaire à l'équation

(3) $$4a-b^2=x^2+y^2+z^2,$$

où $x^2+y^2+z^2$ désigne l'une des formes trinaires du nombre $4a-b^2$. Ensuite on déduira des équations de l'article précédent les valeurs des indéterminées s, t, u, v, comme il suit :

$$(4)\quad s=\frac{b+x+y\pm z}{4},\quad t=\frac{b+x}{2}-s,\quad u=\frac{b+y}{2}-s,\quad v=\frac{b\pm z}{2}-s.$$

Puisque les nombres b, x, y, z sont tous impairs, il faudra que l'un des nombres $b+x+y+z$, $b+x+y-z$ soit de la forme $4n$, et l'autre de la forme $4n+2$; donc, en prenant convenablement le signe de z, dans l'expression de s, on aura un nombre entier pour la valeur de s, ce qui donnera ensuite des nombres entiers pour les valeurs des trois autres indéterminées. On voit par là qu'il n'y a qu'un des deux signes de z qui puisse être employé, et qu'ainsi on n'a qu'une solution pour chaque forme trinaire de $4a-b^2$.

(8) Maintenant, puisque nous avons supposé $x>y>z$, il est clair que les valeurs de s, t, u, v seront toujours positives, si celle de v l'est dans le cas le moins favorable, c'est-à-dire si l'on a $\frac{b-z}{2}-s>0$, ou $\frac{b-x-y-z}{4}>0$.

Il suffit, pour cela, qu'on ait $x+y+z<b+4$; car $b-x-y-z$ doit toujours être divisible par 4, dans le cas dont il s'agit. Or, d'après l'équation $4a-b^2=x^2+y^2+z^2$, on a $x+y+z<\sqrt{3(4a-b^2)}$, et en faisant $(b+4)^2=3(4a-b^2)$, on tirera de cette équation

$$b=\sqrt{(3a-3)}-1.$$

Si donc b, qui doit toujours être plus petit que $\sqrt{4a}$, est supposé en même temps plus grand que la limite $\sqrt{(3a-3)}-1$, on sera assuré que les valeurs des indéterminées s, t, u, v, déduites des formules précédentes, seront toutes positives, et qu'ainsi le problème sera résolu.

Un seul cas fait exception, c'est celui où l'on aurait à-la-fois $x=y=z=\sqrt{\left(\frac{4a-b^2}{3}\right)}$ et $b=\sqrt{(3a-3)}-1$; car alors il en résulterait $x+y+z=b+4$, et par conséquent $v=-1$. Mais il est facile de faire ensorte que ce cas particulier ne puisse avoir lieu, il suffit pour cela d'augmenter aussi peu qu'on voudra la limite inférieure de b.

Nous supposerons donc désormais que les limites de b sont

$$b > \sqrt{(3a-2)} - 1, \qquad b < \sqrt{4a};$$

et dans cette hypothèse les formules (4) donneront toujours des valeurs positives pour les quatre indéterminées s, t, u, v, même quand b serait égale à sa limite inférieure.

(9) En admettant la limite $b > \sqrt{(3a-2)} - 1$, on a la certitude que la solution sera donnée toujours en nombres positifs. Mais il ne s'ensuit pas que si on prenait b plus petit que cette limite (et cependant plus grand que $\sqrt{a}$), le problème ne pourrait être résolu en nombres positifs. Il arrivera, au contraire, assez souvent, surtout si a est un grand nombre, que des valeurs de b plus petites que la limite assignée donneront des solutions en nombres positifs; et ces solutions se trouveront également par les formules (4), toutes les fois qu'elles pourront avoir lieu. C'est ce dont on verra un grand nombre d'exemples ci-après.

Second cas. a *et* b *pairs.*

(10) Les nombres a et b étant pairs, $4a - b^2$ sera divisible par 4; et puisque cette quantité est représentée par $x^2 + y^2 + z^2$, il faudra que les trois nombres x, y, z soient pairs. On simplifiera donc l'équation en mettant $2x$, $2y$, $2z$ à la place de x, y, z, ce qui donnera

$$(5) \qquad a - (\tfrac{1}{2}b)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Cela posé, si $a - (\frac{1}{2}b)^2$ n'est pas de la forme $4^k(8n+7)$, cette équation sera satisfaite par toute forme trinaire, propre ou impropre, du nombre $a - (\frac{1}{2}b)^2$. Connaissant donc les trois nombres x, y, z, on aura pour déterminer s, t, u, v, les quatre équations

$$\begin{aligned} s + t + u + v &= b, \\ s + t - u - v &= 2x, \\ s + u - t - v &= 2y, \\ s + v - t - u &= \pm 2z, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les valeurs

$$(6) \quad s = \frac{\frac{1}{2}b + x + y \pm z}{2}, \; t = \tfrac{1}{2}b - s + x, \; u = \tfrac{1}{2}b - s + y, \; v = \tfrac{1}{2}b - s \pm z.$$

Ces valeurs seront des nombres entiers dans les deux cas que présente le signe ambigu; ainsi il en résultera toujours deux solutions, excepté le cas de $z=0$, où les deux solutions se réduisent à une seule.

(11) Maintenant, pour que ces solutions soient admissibles, il faut que les quatre nombres s, t, u, v soient positifs, ce qui aura lieu si dans le cas le moins favorable, v est positif, ou si l'on a $\frac{\frac{1}{2}b-x-y-z}{2}>0$.

Cette condition sera remplie comme dans le premier cas, en supposant $b>\sqrt{(3a-2)}-1$. D'ailleurs on devra faire les mêmes observations que dans l'art. 9, relativement aux solutions qui peuvent avoir lieu dans certains cas où b serait inférieur à la limite assignée.

(12) Il y a diverses remarques à faire sur la solution du problème précédent, selon les diverses formes du nombre a.

1°. Si a est de la forme $4n+2$, le nombre $a-\frac{1}{4}b^2$ sera de l'une des formes $4n+1$, $4n+2$, lesquelles sont toujours décomposables en trois carrés, d'après la théorie exposée dans la troisième partie. Donc dans ce cas, les équations proposées seront toujours résolubles.

2°. Si a est de la forme $8n+4$, on pourra satisfaire aux équations proposées de deux manières, les nombres s, t, u, v étant tous pairs ou tous impairs : ces deux solutions seront données par les formules (6); mais il faut, dans ce cas, que $a-\frac{1}{4}b^2$ ne soit pas de la forme $4^k(8n+7)$.

3°. Si a est de la forme $8(2n+1)$, les nombres s, t, u, v devront être pairs, et en général si a est de la forme $2^{2k+1}(2n+1)$, ces nombres devront être divisibles par 2^k; leur somme b devra donc être aussi divisible par 2^k et même par 2^{k+1}, parce que le quotient devra être pair. Soit donc $a=2^{2k}a'$, $b=2^k b'$, $s=2^k s'$, $t=2^k t'$, $u=2^k u'$, $v=2^k v'$, la solution des équations proposées se réduira à celle des équations

$$a'=s'^2+t'^2+u'^2+v'^2,$$
$$b'=s'+t'+u'+v';$$

elle sera donc toujours possible, puisqu'alors a' est de la forme $4n+2$. Mais on remarquera que dans ce cas il ne suffit pas que b soit compris entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)}-1$, il faut encore que b soit divisible par 2^{k+1}. Les autres valeurs de b comprises entre les limites

assignées, ne pouvant satisfaire, on trouverait qu'elles réduisent $a - \frac{1}{4}b^2$ à la forme $4^k(8n+7)$.

On pourra descendre au-dessous de la limite $\sqrt{(3a-2)} - 1$, pour essayer s'il y a d'autres solutions; mais il faudra toujours que les valeurs de b soient divisibles par 2^{k+1}.

4°. Enfin si a est de la forme $2^{2k+2}(2n+1)$, k n'étant pas zéro, il faudra que chacun des nombres s, t, u, v soit divisible par 2^k, et leur somme b par 2^{k+1}. C'est pourquoi faisant $a = 2^{2k}a'$, $b = 2^k b'$, $s = 2^k s'$, $t = 2^k t'$, $u = 2^k u'$, $v = 2^k v'$, les équations proposées se réduiront aux suivantes,

$$a' = s'^2 + t'^2 + u'^2 + v'^2,$$
$$b' = s' + t' + u' + v',$$

dans lesquelles a' sera de la forme $8n+4$, et qui se rapporteront ainsi au second cas, comme le précédent se rapporte au premier.

(13) La théorie exposée dans ce chapitre, est la base de la démonstration générale du théorème de Fermat, dont nous nous occuperons dans le chapitre suivant; elle peut être utile dans plusieurs autres recherches d'analyse indéterminée.

On voit déjà que cette théorie donne une extension remarquable aux deux premiers cas du théorème sur les nombres polygones, puisqu'elle offre les moyens non-seulement de décomposer un nombre donné en trois ou en quatre carrés, mais de faire ensorte que la somme des racines de ces carrés soit égale à un nombre donné pris entre certaines limites.

§ II. *Démonstration du Théorème de Fermat, sur les nombres polygones, et de quelques autres Théorèmes analogues.*

(14) On a fait voir ci-dessus (art. 154) qu'un nombre polygone de l'ordre $m+2$, a pour expression générale

$$\frac{m}{2}(x^2-x)+x,$$

x désignant le côté de ce polygone, ou le rang qu'il tient parmi les polygones du même ordre. Cette expression prouve que 0 et 1 sont deux termes communs aux polygones de tous les ordres.

Les nombres triangulaires résultent de la supposition $m=1$, et les carrés de la supposition $m=2$; dans ces deux premiers cas, il est indifférent de prendre x positif ou négatif, et on n'obtient qu'une seule et même suite, celle des nombres triangulaires ou celle des carrés.

Mais m étant >2, l'expression générale des nombres polygones donne deux suites différentes pour chaque ordre, selon qu'on suppose x positif ou négatif. Ces deux suites sont liées entr'elles par une même loi, de sorte que l'une n'est que le prolongement de l'autre; mais dans l'application au théorème de Fermat, on fait toujours abstraction de la suite formée avec des valeurs négatives de x, et on ne considère que celle qui est formée avec les valeurs positives, comme les présente le tableau du n° 154.

(15) Cela posé, il faut démontrer qu'*un nombre quelconque est composé d'autant de polygones de l'ordre* $m+2$, *qu'il y a d'unités dans* $m+2$.

Le nombre des polygones qui composent un nombre donné, pourrait cependant être moindre que $m+2$; mais en regardant 0 comme un polygone complétif, le nombre des polygones pourra toujours être censé $m+2$, conformément à l'énoncé de la proposition.

Ce théorème ayant été démontré dans le Traité précédent, pour le

cas des nombres triangulaires et pour celui des carrés, qui sont les deux premiers de la proposition générale, nous ne considérerons que les cas ultérieurs où l'on a $m > 2$, savoir, $m = 3$ pour les nombres pentagones, $m = 4$ pour les hexagones, et ainsi de suite.

Or d'après ce qui a été démontré dans le § précédent, il ne reste plus à établir qu'un petit nombre de propositions subsidiaires pour parvenir à celle qui fait l'objet de ce chapitre.

(16) Théorème I. « a étant un nombre impair quelconque, non » compris dans les dix suivans 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 37, 71, » il existe toujours deux nombres impairs consécutifs c, $c - 2$, tels » qu'en faisant successivement $b = c$ et $b = c - 2$, on pourra, dans » les deux cas, satisfaire aux équations

$$(1) \qquad \begin{aligned} a &= s^2 + t^2 + u^2 + v^2, \\ b &= s + t + u + v, \end{aligned}$$

» avec la condition que les racines s, t, u, v soient toutes positives. »

En effet, 1°. si la différence entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)} - 1$, est égale à 4 ou plus grand que 4, il y aura au moins quatre nombres entiers consécutifs compris entre ces limites. De ces quatre nombres, deux seront impairs et pourront être pris pour b; les équations proposées seront donc résolubles, dans les deux cas, par les formules de l'art. 7.

Or en faisant $\sqrt{(4a)} - \sqrt{(3a-2)} + 1 = 4$, on trouve $a = 121$; donc le nombre 121 et tous les nombres impairs plus grands que 121, jouissent de la propriété mentionnée.

2°. Si ensuite on examine tous les nombres impairs au-dessous de 121, on trouvera que pour une partie de ces nombres, il existe deux valeurs de b comprises entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)} - 1$, et que pour l'autre partie il n'existe qu'une seule valeur de b.

Dans le second cas, on devra essayer, d'après les formules de l'art. 7, si le nombre impair immédiatement inférieur, quoique plus petit que la limite $\sqrt{(3a-2)} - 1$, ne peut pas être pris pour b, et conduire à une solution des équations (1), dans laquelle les racines s, t, u, v soient prises positivement.

Cet essai réussira pour la plupart des nombres dont il s'agit, et il ne restera que les dix valeurs mentionnées de a, savoir, 1, 3, 5,

7, 11, 15, 19, 23, 71, pour lesquelles il n'y a qu'une valeur de b qui satisfasse.

Voici un tableau qui contient le résultat de ces calculs.

a	b	a	b
119...111	21,19	29...25	9,7*
109	19,17*	23	9
107... 91	19,17	21	9,7
89,87	17,15*	19	7
85... 73	17,15	17	7,5*
71	15	15	7
69,67	15,13*	13	7,5*
65... 57	15,13	11	5
55... 49	13,11*	9	5,3*
47... 43	13,11	7	5
41,39	11, 9*	5	3
37	11	3	3
35... 31	11, 9	1	1

(17) Pour mieux faire concevoir la construction de ce tableau, nous allons donner des exemples de chacun des trois cas qu'il présente.

Premier cas. Si on fait $a = 65$, on trouve pour b les deux valeurs 15 et 13, comprises entre les limites $\sqrt{260}$ et $\sqrt{193} - 1$. Les mêmes valeurs auraient également lieu pour les nombres 63, 61, 59, 57; aussi voit-on dans le tableau, que pour tous les nombres impairs de 65 à 57, les valeurs correspondantes de b sont 15 et 13.

Second cas. Si on fait $a = 41$, on trouve qu'il n'y a que le nombre impair 11 qui soit compris entre les limites $\sqrt{164}$ et $\sqrt{121} - 1$; mais si on essaie la valeur suivante $b = 9$, quoiqu'inférieure à la limite $\sqrt{121} - 1$, on trouve par les formules du n° 7, qu'elle satisfait aussi, puisqu'on a $41 = 6^2 + 2^2 + 1^2$ et $9 = 6 + 2 + 1$. On a donc mis dans la table les valeurs $b = 11$, $b = 9$, correspondantes au nombre $a = 41$; mais on a distingué par une * la seconde valeur 9, pour avertir qu'elle est inférieure à la limite $\sqrt{(3a - 2)} - 1$.

Troisième cas. Si on fait $a = 71$, on ne trouve qu'un nombre impair

15, compris entre les limites qui conviennent à cette valeur de a; savoir, $\sqrt{284}$ et $\sqrt{211}-1$. Si ensuite on essaie la valeur $b=13$, on trouve par les formules du n° 7, qu'elle n'est pas admissible, parce que l'une des indéterminées s, t, u, v serait négative. On n'a donc mis dans le tableau que la seule valeur $b=15$, correspondante au nombre $a=71$.

(18) Théorème II. « Soit a un nombre impair quelconque; soient » c, $c-2$, $c-4$,...... d, les diverses valeurs successives de b avec » lesquelles on peut résoudre en nombres positifs les équations (1); soit » enfin r un terme quelconque de la suite 0, 1, 2, 3..... $m-2$.

» Si on considère la fonction

$$Z=\frac{m}{2}(a-b)+b+r,$$

» dans laquelle b et r sont des termes pris à volonté dans les suites » qui leur sont propres, et qu'on appelle P ou $P(a)$ la plus petite valeur » de cette fonction, Q ou $Q(a)$ la plus grande; on aura

$$P(a)=\frac{m}{2}(a-c)+c,$$
$$Q(a)=\frac{m}{2}(a-d)+d+m-2.$$

» Cela posé, je dis, 1°. que tous les nombres entiers compris depuis » $P(a)$ jusqu'à $Q(a)$, seront représentés par la fonction Z; 2°. que tous » ces nombres pourront être décomposés chacun en $m+2$ polygones » de l'ordre $m+2$. »

En effet, 1°. soit $Z=P(a)+p$, p étant un nombre pris à volonté depuis 1 jusqu'à $Q(a)-P(a)$, on aura pour déterminer b et r, l'équation

$$p=(m-2)\left(\frac{c-b}{2}\right)+r;$$

or puisque p et $m-2$ sont deux nombres donnés, on voit que r est le reste de la division de p par $m-2$, et que si on appelle q le quotient de cette division, on aura $\frac{c-b}{2}=q$, ou $b=c-2q$.

Il suit de là que pour chaque valeur donnée de p, on n'a qu'une solution, excepté lorsque le reste r est zéro; car alors on peut faire

indifféremment $r=0$ ou $r=m-2$, et il y aura deux solutions. Cependant s'il s'agit du dernier des nombres $P(a)+p$, qui est $Q(a)$, il faudra prendre $r=m-2$, et il n'y aura qu'une solution, parce qu'en faisant $r=0$, on aurait $b=d-2$, nombre qui n'est pas compris dans la suite $c, c-2, c-4, \ldots\ldots d$.

2°. $P(a)+p$ ou $P+p$ étant un nombre quelconque pris dans la suite $P, P+1, P+2 \ldots\ldots\ldots Q$, puisqu'on peut toujours supposer $P+p=\frac{m}{2}(a-b)+b+r$, si on substitue dans cette expression les valeurs de a et b données par les équations (1), on aura

$$P+p= \frac{m}{2}(s^2-s+t^2-t+u^2-u+v^2-v)+r$$
$$+s+t+u+v.$$

Donc si on désigne en général par pol. x, le polygone de l'ordre $m+2$ dont le côté est x, on aura

$$P+p = \text{pol. } s + \text{pol. } t + \text{pol. } u + \text{pol. } v + r \text{ pol. } 1\,;$$

c'est-à-dire que le nombre $P+p$ sera composé des quatre polygones dont les côtés sont s, t, u, v, et de r polygones égaux à l'unité; donc comme r est $< m-2$ ou tout au plus $= m-2$, il s'ensuit que le nombre $P+p$ sera composé de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, dont $m-2$ sont égaux indifféremment à zéro ou à l'unité.

(19) Théorème III. « Lorsque $a=121$, la plus grande valeur de b » est 1, et alors on a $P(a)=\frac{m}{2}(a-b)+b=50m+21$, nombre » qui, suivant la proposition précédente, est la somme de quatre poly- » gones de l'ordre $m+2$.

» Cela posé, je dis que tout nombre entier plus grand que $50m+21$, » est la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, dont $m-2$ se- » ront égaux à zéro ou à l'unité. »

En effet, soit a un nombre impair quelconque plus grand que 121; il existera toujours, suivant le théorème I, deux nombres impairs consécutifs $c, c-2$, compris entre les limites $\sqrt{4a}$ et $\sqrt{(3a-2)}-1$, et il suit du théorème précédent que si l'on fait

$$P(a) = \frac{m}{2}(a-c)+c,$$
$$Q(a) = \frac{m}{2}(a-c+2)+c-2+m-2,$$

tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $Q(a)$ inclusivement, seront la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

Considérons maintenant le nombre $P(a+2)$, et soit c' le plus grand nombre impair compris dans $\sqrt{(4a+8)}$, comme c est le plus grand nombre impair compris dans $\sqrt{4a}$; il faut distinguer deux cas, selon qu'on a $c'=c$, ou $c'=c+2$; car il est évident qu'on ne peut faire aucune autre supposition sur la valeur de c'.

(20) Si l'on a $c'=c$, il suffira de mettre $a+2$ au lieu de a, dans l'expression de $P(a)$, et on aura

$$P(a+2)=\frac{m}{2}(a+2-c)+c;$$

comparant cette valeur avec celle de $Q(a)$, on en tire

$$P(a+2)=Q(a)-m+4.$$

Or la moindre valeur de m étant 3, on voit que le nombre $P(a+2)$ ne surpasse $Q(a)$ que dans le seul cas de $m=3$, où l'on a $P(a+2)=Q(a)+1$. Dans tout autre cas, $P(a+2)$ est compris dans la suite $P(a)$, $P(a)+1$, $P(a)+2$,.....$Q(a)$.

Mais on a vu que tous les nombres de cette suite sont composés de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, et dans le cas où le terme $P(a+2)$ sortirait de cette suite, pour y ajouter le terme suivant $Q(a)+1$, ce terme serait composé de quatre polygones seulement; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $P(a+2)$ inclusivement, sont composés de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

(21) En second lieu, soit $c'=c+2$, on aura

$$P(a+2)=\frac{m}{2}(a-c)+c+2,$$

et par conséquent $P(a+2)=P(a)+2=Q(a)-2(m-3)$. De là on voit que $P(a+2)$ est toujours plus petit que $Q(a)$, excepté dans le seul cas de $m=3$, où l'on a $P(a+2)=Q(a)$; donc tous les nombres entiers compris depuis $P(a)$ jusqu'à $P(a+2)$ inclusivement, sont décomposables en $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

(22) Si on observe maintenant que dans le premier cas on a

$P(a+2) = P(a) + m$, et dans le second $P(a+2) = P(a) + 2$; on pourra en conclure qu'à compter d'un nombre donné a tel que $a = 121$, la suite $P(a)$, $P(a+2)$, $P(a+4)$, etc., formée en augmentant toujours a de deux unités, s'étend à l'infini. Donc tous les nombres entiers compris depuis $P(121)$, ou $50m+21$ jusqu'à l'infini, sont décomposables en $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$.

Il reste à démontrer que tous les nombres inférieurs à $50m+21$, jouissent de la même propriété; c'est l'objet de la proposition suivante, qui complète la démonstration générale du théorème de Fermat.

(23) Théorème IV. « Tout nombre entier plus petit que $P(121)$, » ou $50m+21$, est la somme de $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$, » dont $m-2$ sont égaux à zéro ou à l'unité. »

Soit d'abord $a = 5$; on voit par le tableau du n° 16 que 3 est la seule valeur correspondante de b; faisant donc $c = d = 3$, les formules du n° 18 donneront

$$P(5) = m + 3,$$
$$Q(5) = 2m + 1.$$

Au-dessous de $P(5)$, on a les nombres 1, 2, 3.....$m+2$, qui sont composés d'autant de polygones égaux à 1 qu'ils contiennent d'unités; ainsi le théorème est vrai à leur égard, on voit même que le dernier de ces nombres $m+2$ est exprimé par un seul polygone, savoir, pol. 2.

Les nombres de $P(5)$ à $Q(5)$ sont composés comme l'énonce le théorème, puisque cette propriété a lieu en général pour tous les nombres de $P(a)$ à $Q(a)$. Ainsi le théorème est vérifié jusqu'au nombre $Q(5) = 2m+1$.

Soit maintenant $a = 7$, on aura, par la table du n° 16, $c = d = 5$, ce qui donne

$$P(7) = m + 5,$$
$$Q(7) = 2m + 3.$$

Comme la moindre valeur de m est 3, on voit que $P(7)$ ne surpasse $Q(5)$ que dans le seul cas où $m = 3$, et alors on a $P(7) = Q(5) + 1$. Donc la propriété générale est vérifiée par tous les nombres depuis 1 jusqu'à $Q(7) = 2m+3$.

On pourrait continuer ainsi l'examen des cas particuliers jusqu'à

$P(121)$; mais nous nous bornerons à un petit nombre de cas généraux qui renferment la solution de tous les cas particuliers. Il s'agit en général d'examiner si tous les nombres compris de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème, ou s'il y a exception pour quelques-uns de ces nombres.

(24) *Premier cas.* Supposons que pour le nombre a il y ait deux valeurs correspondantes de b, savoir c et $c-2$, et que pour $a+2$ il y ait une ou plusieurs valeurs de b, dont la plus grande soit c, on trouvera, comme dans l'article 20, que tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Second cas. Supposons que c et $c-2$ étant les deux valeurs de b correspondantes au nombre a, on ait $c+2$ pour la plus grande ou la seule valeur de b correspondante au nombre $a+2$; on trouvera encore, comme dans le n° 21, que tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Troisième cas. Supposons que b n'ait que la seule valeur c correspondante au nombre a, et que pour $a+2$ on ait une ou plusieurs valeurs de b, dont la plus grande soit $c+2$, on aura, dans ce cas,

$$P(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c + m - 2,$$

$$P(a+2) = \frac{m}{2}(a-c) + c + 2.$$

De là on voit que $P(a+2)$ ne peut surpasser $Q(a)$ que dans le seul cas de $m=3$; qu'alors on a $P(a+2)=Q(a)+1$; que dans tous les autres cas $P(a+2)$ sera plus petit que $Q(a)$, ou tout au plus égal à $Q(a)$, et qu'ainsi tous les nombres de $P(a)$ à $P(a+2)$ satisfont au théorème.

Quatrième cas. Supposons enfin que relativement à a on ait la seule valeur $b=c$, et relativement à $a+2$, une ou deux valeurs de b, dont la plus grande soit c, alors on aura

$$P(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c,$$

$$Q(a) = \frac{m}{2}(a-c) + c + m - 2,$$

$$P(a+2) = \frac{m}{2}(a+2-c) + c.$$

On voit dans ce cas qu'il y a une lacune entre $Q(a)$ et $P(a+2)$, car on a $P(a+2) = Q(a)+2$, et l'intermédiaire qui manque est $Q(a)+1$. Ainsi, sauf cette exception, le théorème démontré jusqu'à $P(a)$, le sera jusqu'à $P(a+2)$.

(25) Il suffit maintenant de jeter un coup-d'œil sur le tableau du n° 16, pour trouver quels sont les nombres $Q(a)+1$ qui tomberont dans l'exception du quatrième cas. Ces nombres se réduisent à quatre, savoir :

$$\begin{aligned} Q(7)+1 &= 2m+4, \\ Q(15)+1 &= 5m+6, \\ Q(23)+1 &= 8m+8, \\ Q(37)+1 &= 14m+10; \end{aligned}$$

or l'expression générale de pol. x (art. 14) donne

$$\begin{aligned} \text{pol. } 2 &= m+2, \\ \text{pol. } 3 &= 3m+3, \\ \text{pol. } 4 &= 6m+4, \\ \text{pol. } 5 &= 10m+5, \end{aligned}$$

et par le moyen de ces polygones on pourra exprimer les quatre nombres précédens comme il suit :

$$\begin{aligned} 2m+4 &= 2\text{pol. } 2, \\ 5m+6 &= 4\text{pol. } 2 + (m-2)\text{ pol. } 1, \\ 8m+8 &= \text{pol. } 4 + 2\text{ pol. } 2, \\ 14m+10 &= \text{pol. } 5 + \text{pol. } 3 + \text{pol. } 2. \end{aligned}$$

Un seul cas, celui de $5m+6$, exige $m+2$ polygones; les trois autres n'en exigent que deux ou trois. Donc les exceptions rentrent dans la proposition générale; donc, *tout nombre entier est la somme de* $m+2$ *polygones de l'ordre* $m+2$, *dont* $m-2$ *seront égaux à zéro ou à l'unité.*

(26) La démonstration que nous venons de donner du théorème de Fermat, ne suppose connue que la démonstration du premier cas de ce théorème, concernant les nombres triangulaires. Or cette proposition fait partie de la théorie générale des formes trinaires des nombres, exposée dans la troisième Partie. Nous avons d'ailleurs prouvé (n° 155), qu'en supposant ce premier cas démontré, on en déduit immédiate-

ment que tout nombre entier est la somme de quatre carrés, ce qui est le second cas du théorème de Fermat. Ainsi du premier cas on déduit tous les autres.

Comme on ne peut guère douter que Fermat n'ait été réellement en possession de la démonstration générale de son théorème sur les nombres polygones, il est à croire que cette démonstration était totalement différente de celle que nous venons d'exposer. En effet, il paraît d'abord que Fermat n'avait aucune connaissance de la théorie des formes trinaires des nombres, excepté dans le cas des nombres $8n+3$, qui revient au premier cas de son théorème, mais dont il ne fait pas mention, et dans le cas des nombres premiers $8n-1$, qu'il assure être de la forme $p^2+q^2+2r^2$, dont le double est la somme de trois carrés. Si Fermat eût connu la théorie dont il s'agit, il n'aurait pas restreint cette dernière propriété aux nombres premiers $8n-1$, puisqu'elle s'étend généralement à tous les nombres impairs. En second lieu, si la démonstration de Fermat eût été la même que la précédente, ou fondée sur les mêmes principes, il n'aurait pas manqué d'ajouter au théorème la condition qui lui donne plus de précision et d'élégance, savoir, que sur les $m+2$ polygones de l'ordre $m+2$ qui composent un nombre donné, il y en a toujours $m-2$ qu'on peut supposer égaux à zéro ou à l'unité.

M. Cauchy a donc fait une découverte importante dans la théorie des nombres, en donnant le premier la démonstration du théorème de Fermat, devenu plus précis par la condition qu'il y a ajoutée. Mais on peut aller encore plus loin en démontrant que, passé une certaine limite facile à assigner pour chaque ordre de polygones, tout nombre donné peut être décomposé en quatre polygones ou en cinq au plus. Cette nouvelle proposition fera l'objet des recherches suivantes.

(27) Supposons que le nombre donné A soit décomposable en quatre polygones de l'ordre $m+2$, il faudra faire

$$A=\frac{m}{2}(a-b)+b,$$

et déterminer les nombres a et b de manière qu'on puisse résoudre en nombres entiers positifs les équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} a &= s^2+t^2+u^2+v^2,\\ b &= s+t+u+v; \end{aligned}$$

or il sera possible de satisfaire à ces équations, si a et b sont de même espèce, si b est compris entre les limites $\sqrt{(4a)}$ et $\sqrt{(3a-2)}-1$, enfin si a est impair ou double d'un impair. Il y aurait d'autres valeurs de a et de b qui permettraient d'effectuer la résolution des équations (1) ; mais il suffira de considérer celles dont nous venons de faire mention.

(28) Si l'on fait successivement $b=\sqrt{4a}$ et $b=\sqrt{(3a-2)}-1$, on trouvera que les limites de b correspondantes au nombre donné A, sont

$$b<\frac{2m-4}{m}+\sqrt{\left[\frac{8A}{m}+\left(\frac{2m-4}{m}\right)^2\right]},$$
$$b>\frac{m-6}{2m}+\sqrt{\left[\frac{6A}{m}-3+\left(\frac{m-6}{2m}\right)^2\right]},$$

et si on suppose que A est un grand nombre, on aura à peu près $b<\sqrt{\frac{8A}{m}}$, $b>\sqrt{\frac{6A}{m}}$.

Connaissant les diverses valeurs de b par ces limites, on connaîtra a par l'équation $a=b+\frac{2}{m}(A-b)$; et comme $a-b$ doit être pair, il s'ensuit que $\frac{A-b}{m}$ est un entier. Soit cet entier $=x$, on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} b &= A-mx, \\ a &= b+2x. \end{aligned}$$

Cela posé, on peut démontrer les propositions suivantes.

(29) Théorème V. « m étant un nombre impair, si A est un nombre » donné quelconque $>28m^3$, je dis que A sera décomposable en quatre » polygones de l'ordre $m+2$. »

Les limites de b étant connues, on connaîtra celles de x par l'équation $x=\frac{A-b}{m}$. Supposons que la différence des limites de b soit égale à $2m$ ou plus grande que $2m$, alors la différence des limites de x sera égale à 2 ou plus grande que 2 ; donc x aura au moins deux valeurs consécutives h, $h+1$; et puisque m est impair, les deux valeurs correspondantes de b, tirées de l'équation $b=A-mx$, seront l'une paire, l'autre impaire. En prenant la valeur impaire, le nombre a sera aussi

impair, puisqu'on a $a = b + 2x$; on pourra donc résoudre les équations (1). Donc pour que le nombre A soit décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, il suffit qu'on ait $\sqrt{\frac{8A}{m}} - \sqrt{\frac{6A}{m}} > 2m$, ou $A > m^3 (\sqrt{8} + \sqrt{6})^2$, ou plus simplement $A > 28m^3$; ce qui s'accorde avec l'énoncé du théorème.

On voit que ce théorème est d'une grande généralité, puisqu'il s'applique à tous les uombres plus grands que la limite $28m^3$, et qu'il suppose seulement que l'ordre des polygones, désigné par $m + 2$, est impair.

(30) Théorème VI. « m étant pair, tout nombre impair $A > 7m^3$, » sera décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$; et tout » nombre pair $A + 1 > 7m^3$ sera décomposable en cinq polygones dont » un sera égal à l'unité. »

En effet, si A est impair et m pair, il résulte immédiatement des équations (2) que b et a sont des nombres impairs, quel que soit x; ainsi la solution sera toujours possible s'il y a une valeur de x comprise entre les limites requises, c'est-à-dire si les limites de b diffèrent entr'elles d'une quantité plus grande que m. On devra donc avoir $\sqrt{\left(\frac{8A}{m}\right)} - \sqrt{\left(\frac{6A}{m}\right)} > m$, ce qui donne $A > 7m^3$.

Quant à la seconde partie du théorème, elle suit immédiatement de la première, puisqu'en retranchant 1 du nombre pair donné, on a un nombre impair qui est décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$.

(31) Théorème VII. « Si m est pairement pair ou de la forme $4n$, » tout nombre pair $A > 28m^3$ sera décomposable en quatre polygones » de l'ordre $m + 2$. »

Car puisqu'on a $a = A - (m + 2)x$, s'il y a deux valeurs $x = h$, $x = h + 1$, comprises entre les limites qui conviennent à x, ou si l'on a $A > 28m^3$, et qu'on appelle a, a', les deux valeurs correspondantes de a, on aura $a - a' = m - 2 = 4n - 2$; donc des deux nombres a, a', il y en aura un impairement pair, et la solution sera possible.

(32) Théorème VIII. « Si m est impairement pair ou de la forme $4n+2$,

» tout nombre impairement pair $A > 7m^3$ sera décomposable en quatre » polygones de l'ordre $m + 2$. »

Car puisqu'on a $a = A - (m - 2)x$, et que $m - 2$ est de la forme $4n$, le nombre a sera impairement pair, quel que soit x. Il suffit donc que x ait une valeur, c'est-à-dire qu'on ait $A > 7m^3$, et la solution sera toujours possible.

Au moyen de ces propositions, il est démontré que tout nombre A qui passe une certaine limite, est décomposable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, excepté seulement le cas où $m + 2$ et A seraient l'un et l'autre divisibles par 4. Or ce cas même peut être réduit à la moitié de son étendue par la proposition suivante.

(33) Théorème IX. « Si m est impairement pair, ou de la forme » $4m' + 2$, tout nombre pairement pair $4A' > 28m^3$ sera décompo- » sable en quatre polygones de l'ordre $m + 2$, pourvu que $A' - m'$ » soit impair. »

Car puisqu'on a $a = 4A' - 4m'x$ et $b = 4A' - 2x$, si l'on fait $\frac{1}{4}a = a'$ et $\frac{1}{2}b = b'$, la résolution des équations (1) pourra être donnée par celles des mêmes équations où l'on mettrait a' et b' à la place de a et b; alors on aurait

$$a' = A' - m'x,$$
$$b' = 2a' - x.$$

Or puisqu'on suppose $A' - m'$ impair, si on a une valeur impaire de x, les nombres a' et b' seront impairs, et on pourra résoudre les équations (1). Il suffit donc pour cela que les limites de x diffèrent entre elles de deux unités au moins, ce qui aura lieu si on a $4A' > 28m^3$.

Il est inutile de pousser plus loin ces recherches, puisque s'il existe des cas où un nombre pairement pair qui surpasse la limite $28m^3$, ou telle autre qu'on pourrait assigner, n'est pas décomposable en quatre polygones, on est sûr que ce même nombre sera décomposable en cinq polygones dont l'un sera égal à l'unité. Nous allons faire voir maintenant, par un exemple, comment on peut déterminer directement les polygones dont se compose un nombre donné quelconque.

(34) Soit proposé de décomposer le nombre 6484 en huit ou en un moindre nombre d'octogones.

Il faut, d'après le théorème général, que $A - r$ soit décomposable en quatre octogones, A étant le nombre proposé 6484, et r étant égal

à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4. Or dans le cas de $m = 6$, les limites de b sont, suivant les formules de l'art. 28,

$$b > \sqrt{(A - r - 3)}, \quad b < \tfrac{4}{3} + \sqrt{[\tfrac{4}{3}(A - r) + \tfrac{16}{9}]}.$$

On satisfera toujours à ces limites, en faisant dans la première $r = 0$, et dans la seconde $r = 4$, ce qui donnera

$$b > \sqrt{6481}, \quad b < \tfrac{4}{3} + \sqrt{(8641\tfrac{7}{9})}.$$

Ainsi on pourra prendre pour b un terme quelconque de la suite 81, 82, 83......94.

Pour déterminer x, on a l'équation $x = \frac{A-r-b}{m} = 1080 - \left(\frac{b+r-4}{6}\right)$, d'où il résulte que $\frac{b+r-4}{6}$ doit être un entier ; ainsi le nombre b devra être de l'une des formes $6n + 0, 1, 2, 3, 4$, auxquelles répondent les valeurs $r = 4, 3, 2, 1, 0$. Cela posé, en se conformant aux limites trouvées, on aura les valeurs de b et r, ensuite celles de x et a, comme il suit :

$b = 81$, $r = 1$, $x = 1067$, $a = 2215$,
$b = 82$, $r = 0$, $x = 1067$, $a = 2216$,
$b = 84$, $r = 4$, $x = 1066$, $a = 2216$,
$b = 85$, $r = 3$, $x = 1066$, $a = 2217$,
$b = 86$, $r = 2$, $x = 1066$, $a = 2218$,
$b = 87$, $r = 1$, $x = 1066$, $a = 2219$,
$b = 88$, $r = 0$, $x = 1066$, $a = 2220$,
$b = 90$, $r = 4$, $x = 1065$, $a = 2220$,
$b = 91$, $r = 3$, $x = 1065$, $a = 2221$,
$b = 92$, $r = 2$, $x = 1065$, $a = 2222$,
$b = 93$, $r = 1$, $x = 1065$, $a = 2223$,
$b = 94$, $r = 0$, $x = 1065$, $a = 2224$.

De là se déduisent plusieurs solutions du problème proposé.

1°. Les trois valeurs impaires de a et b auxquelles correspond la valeur $r = 1$, donneront trois solutions dont le résultat est que le nombre proposé 6484 se forme de quatre octogones et d'un cinquième égal à l'unité.

2°. Les deux valeurs impaires de a et b auxquelles répond la va-

leur $r=3$, donneront deux solutions par lesquelles le nombre proposé se décompose en sept octogones, dont trois sont égaux à l'unité.

3°. Les deux valeurs impairement paires de a qui correspondent à la valeur $r=2$, donneront deux solutions par lesquelles le nombre proposé se décompose en six octogones dont deux sont égaux à l'unité.

4°. Les deux valeurs pairement paires de a auxquelles répond la valeur $r=4$, sont encore admissibles, parce que le nombre $a-\frac{1}{4}b^2$ qui en résulte, peut être décomposé en trois carrés. On obtient par là deux autres décompositions du nombre donné en huit octogones, dont quatre sont égaux à l'unité.

5°. Enfin si on voulait déduire trois autres solutions des valeurs de a et b qui correspondent à la valeur $r=0$, on trouverait que ces solutions ne peuvent avoir lieu, parce que dans ces trois cas le nombre $a-\frac{1}{4}b^2$ se rapporte à la forme $4^k(8n-1)$, qui n'est point décomposable en trois carrés. Nous conclurons de là qu'il n'est pas possible de décomposer le nombre donné 6484 en quatre octogones seulement, au moins tant qu'on prend b supérieur à la limite $\sqrt{(3a-2)}-1$. Mais il peut arriver qu'en prenant des valeurs de b inférieures à cette limite, on trouve des solutions admissibles.

En effet, les valeurs de b qui répondent à $r=0$, étant 94, 88 et 82, celle qui suit immédiatement est $b=76$; cette valeur donne $a=2212$, et $a-\frac{1}{4}b^2=768=4^4.3$, nombre qui est décomposable en trois carrés. On trouve ensuite, par les formules de l'art. 10, que l'une des solutions est admissible, puisqu'elle donne $s=43$, $t=u=v=11$; donc le nombre proposé 6484 est égal à la somme des quatre octogones dont les côtés sont 43, 11, 11, 11.

On remarquera que le nombre $6484>28m^3$ a été choisi de manière qu'il ne soit pas compris dans le théorème IX, et cependant il se trouve décomposable en quatre octogones seulement.

§ III. *Méthodes nouvelles pour la résolution approchée des équations numériques.*

Nous nous proposons de faire voir comment on peut trouver, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, les racines réelles d'une équation proposée, sans qu'on ait aucune connaissance préliminaire de la grandeur et du nombre de ces racines. Les méthodes que nous donnerons pour cet objet, ne supposent que des préparations qui tiennent à la nature de ces méthodes, et peuvent s'appliquer directement à toute équation proposée. La première exige cependant qu'on connaisse une limite supérieure à la plus grande des racines; la recherche de cette limite est donc le premier objet dont nous allons nous occuper.

Limites des Racines réelles.

(35) Il suffira de chercher la limite des racines positives; car en mettant $-x$ à la place de x, ou changeant les signes des termes de rang pair, les racines qui étaient négatives deviendront positives à leur tour; de sorte que la règle trouvée pour les racines positives, s'appliquera également, *mutatis mutandis*, aux racines négatives.

Soit l'équation proposée du degré n,

$$x^n \pm A_1x^{n-1} \pm A_2x^{n-2} \pm A_3x^{n-3} \ldots\ldots \pm A_n = 0,$$

dans laquelle 1 est le coefficient du premier terme, et A_r est le coefficient du terme affecté de la puissance x^{n-r}; pour avoir la limite supérieure des racines réelles et positives, il faut distinguer deux cas.

1°. Si le second terme a un coefficient négatif qui ne soit surpassé par aucun des autres coefficiens négatifs; je dis que ce coefficient, augmenté d'une unité, sera plus grand que la plus grande racine positive.

En effet, si une valeur positive de x pouvait être plus grande que $1 + A_1$, ce serait dans le cas où tous les coefficiens seraient négatifs et égaux à A_1, ensorte que l'équation à résoudre fût

$$x^n - A_1x^{n-1} - A_1x^{n-2} - A_1x^{n-3} \ldots\ldots - A_1 = 0.$$

Mais dans ce cas même, si l'on fait $x = 1 + A_1$, on aura $x^n - A_1 x^{n-1} = x^{n-1}$, $x^{n-1} - A_1 x^{n-2} = x^{n-2}$, etc., de sorte que le premier membre se réduit à $+1$; donc on a toujours $x < 1 + A_1$.

2°. Si le plus grand coefficient négatif n'est pas celui du second terme, soient A_i et A_k, les deux coefficiens négatifs pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands possibles; je dis qu'on aura toujours $x < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}$.

En effet, soit a le plus grand de ces deux radicaux, et b l'autre; il n'y aura, par hypothèse, qu'un seul terme négatif de l'équation représenté par $-a^i x^{n-i}$; tous les autres qu'on peut représenter généralement par $-c^r x^{n-r}$, seront tels qu'on a $c = b$ pour l'un au moins de ces termes, et $c < b$ pour tous les autres. Donc l'hypothèse qui rend x le plus grand est celle où l'équation à résoudre serait

$$\left.\begin{array}{l} x^n - bx^{n-1} - b^2x^{n-2} - b^3x^{n-3} \ldots\ldots - b^n \\ \qquad - x^{n-r}(a^r - b^r) \end{array}\right\} = 0.$$

Le premier membre se réduit à $x^n - x^{n-r}(a^r - b^r) - b\left(\frac{x^n - b^n}{x - b}\right)$, et si l'on fait $x = a + b$, il devient

$$\frac{b^{n+1}}{a} + \frac{a-b}{a}(a+b)^{n-r}\left[(a+b)^r - a\left(\frac{a^r - b^r}{a - b}\right)\right],$$

quantité toujours positive, puisqu'on suppose $a > b$, et qu'on a en général $(a+b)^r > a\left(\frac{a^r - b^r}{a - b}\right)$. Donc la plus grande racine positive de l'équation proposée est plus petite que $a + b$, ou $< \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}$.

Si l'équation proposée n'avait qu'un seul terme négatif $-A_k x^{n-k}$, la limite de x serait simplement $\sqrt[k]{A_k}$, ce qui peut se vérifier immédiatement.

Définition des Fonctions omales.

(56) Nous appellerons *fonction omale* de x, toute fonction qui a la propriété d'être toujours croissante ou toujours décroissante à mesure que x augmente dans le sens positif, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

Nous supposerons toujours x positif; et cependant la fonction omale, considérée comme l'ordonnée d'une courbe, pourrait être positive dans une partie de la ligne des abscisses, et négative dans l'autre; mais nous ne considérerons que les fonctions omales qui demeurent cons-

tamment positives pour toute valeur de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Il suit de notre définition, que pour toute fonction omale $\varphi(x)$, le coefficient différentiel $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ est toujours de même signe, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$. Il sera positif pour les fonctions omales croissantes, et négatif pour les fonctions omales décroissantes.

(37) On peut donner, comme exemples des fonctions omales, les valeurs suivantes de $\varphi(x)$, dans lesquelles nous supposons tous les coefficiens positifs,

$$\varphi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots + K,$$

$$\varphi(x) = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots + K}{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \text{etc.}},$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x}.$$

La première et la seconde sont croissantes, l'une depuis $\varphi(0)=K$ jusqu'à $\varphi(\infty)=\infty$, l'autre depuis $\varphi(0)=0$ jusqu'à $\varphi(\infty)=\infty$; la troisième décroît continuellement depuis $\varphi(0)=1+\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}$ jusqu'à $\varphi(\infty)=1$.

Si on trace la courbe qui a pour équation $y=\varphi(x)$, cette courbe montera ou descendra graduellement, depuis la première ordonnée $\varphi(0)$ jusqu'à la dernière $\varphi(\infty)$, ensorte que la même ordonnée ne pourra jamais répondre à deux abscisses différentes.

Donc c étant un nombre positif donné compris entre $\varphi(0)$ et $\varphi(\infty)$, l'équation $c=\varphi(x)$ aura toujours une racine positive, mais elle n'en pourra avoir qu'une.

Si c n'était pas compris entre les limites $\varphi(0)$ et $\varphi(\infty)$, l'équation $c=\varphi(x)$ n'aurait aucune racine positive.

Résolution de l'Équation omale $c=\varphi(x)$.

(38) Imaginons qu'on décrive la courbe dont l'équation est $y=\varphi(x)$, et supposons d'abord que la fonction $\varphi(x)$ soit croissante, et qu'en même tems la courbe soit concave vers l'axe.

Fig. 1. Soit A le premier point de cette courbe, où l'on a $x=0$, $y=\varphi(0)$. A la distance c de l'axe des x menons la droite CM parallèle à cet

axe, laquelle rencontre en C l'ordonnée prolongée du point A, et en M la courbe CM; il faut déterminer l'abscisse du point M qui sera la valeur de la racine cherchée.

Pour cela, menons en A la tangente Ak, qui rencontre en k la droite CM, et appelons k l'abscisse du point k; nous aurons, en supposant $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$,

$$k = \frac{c - \varphi(0)}{\varphi'(0)}.$$

Par le point k menons une perpendiculaire à Ck, qui rencontre la courbe en n; au point n menons la tangente nk', qui rencontre en k' la droite CM; si on appelle k' l'abscisse du point k', on aura de nouveau

$$k' = k + \frac{c - \varphi(k)}{\varphi'(k)}.$$

Déterminant de même k'' par l'équation

$$k'' = k' + \frac{c - \varphi(k')}{\varphi'(k')},$$

et ainsi de suite, il est évident que la limite vers laquelle convergent les termes de la série croissante k, k', k'', etc. sera la valeur cherchée de x.

On voit donc que pour résondre l'équation omale $c = \varphi(x)$, il faudra calculer successivement les quantités k, k', k'', etc. d'après les formules

$$k = \frac{c - \varphi(0)}{\varphi'(0)},$$
$$k' = k + \frac{c - \varphi(k)}{\varphi'(k)},$$
$$k'' = k' + \frac{c - \varphi(k')}{\varphi'(k')},$$
etc.

et la dernière des quantités k, k', k'', etc., ou la limite vers laquelle elles tendent, sera la valeur de x.

(39) Il est bon de remarquer, 1°. que les premiers termes de la suite k, k', k'', etc. n'ont pas besoin d'être calculés très-exactement; ce n'est que lorsqu'on est parvenu à deux termes peu différens l'un de l'autre, qu'il importe de continuer le calcul avec toute la précision qu'on veut obtenir dans le résultat.

2°. Que si on sait d'avance que x doit être $> k$, alors il faudra supprimer la première des équations de l'article précédent, et partir de la valeur donnée k pour déterminer toutes les autres k', k'', etc., ce qui abrégera le calcul.

Fig. 2. (40) Supposons maintenant que $\varphi(x)$ soit une fonction décroissante, telle cependant qu'on ait $\varphi(0)$ égale à une quantité finie; alors la construction se fera comme elle est indiquée dans la figure 2; et parce que $\varphi'(x)$ devient négatif dans ce cas, les formules pour calculer successivement k, k', k'', etc. devront être écrites comme il suit :

$$k = \frac{\varphi(0) - c}{-\varphi'(0)},$$
$$k' = k + \frac{\varphi(k) - c}{-\varphi'(k)},$$
$$k'' = k' + \frac{\varphi(k') - c}{-\varphi'(k')},$$
etc.

On fera d'ailleurs, pour ce cas, les mêmes observations que dans l'article précédent.

(41) Un troisième cas à considérer est celui où la fonction $\varphi(x)$ est décroissante, mais telle qu'à l'origine des x, on ait $\varphi(0) = \infty$. Dans ce cas, il faut qu'en supposant x infiniment petit, la valeur de $\varphi(x)$ se réduise à la forme $Ax^{-m} +$ etc. On aura donc $Ax^{-m} < c$, et par conséquent $x > \sqrt[m]{\frac{A}{c}}$. Cela posé, il faut prendre $k = \sqrt[m]{\left(\frac{A}{c}\right)}$, et partir de la première valeur $x = k$ pour calculer ensuite les termes k', k'', etc. par les formules de l'article précédent. La limite de ces termes sera la valeur cherchée de x.

Il peut y avoir d'autres cas que ceux qui sont représentés par les figures 1 et 2; nous les examinerons ci-après, article 76.

Méthode pour avoir la plus grande Racine positive d'une équation proposée.

(42) Pour écarter toute difficulté étrangère à notre objet, nous supposerons constamment que l'équation proposée n'a point de racines égales, et qu'elle n'est point divisible par x. Cela posé, on commencera par déterminer la limite supérieure des racines positives,

comme il a été dit dans l'article 35. Soit α cette limite ; on aura donc la racine cherchée $x < \alpha$.

Si on fait passer dans le second membre de l'équation proposée tous les termes négatifs, cette équation prendra la forme suivante :

$$x^n\left(1 + \frac{f}{x} + \frac{g}{x^2} + \text{etc.}\right) = ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.},$$

où tous les coefficiens sont positifs et où il faut observer que les deux polynomes ne peuvent être complets, sans quoi la même puissance de x se trouverait à-la-fois dans les deux membres.

Cela posé, si l'on fait

$$\varphi(x) = \frac{ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.}}{1 + \frac{f}{x} + \frac{g}{x^2} + \frac{h}{x^3} + \text{etc.}},$$

la fonction $\varphi(x)$ sera une fonction omale croissante de x, et on aura à résoudre l'équation $x^n = \varphi(x)$.

Pour cela supposons que l'on construise sur la même ligne des abscisses, et dans le sens positif seulement, les deux courbes dont les équations sont $y = x^n$, $y = \varphi(x)$; désignons par P le point d'intersection de ces deux courbes qui répond à la plus grande racine $x = r$; la racine r étant plus petite que α, si on fait $x = \alpha$ dans $\varphi(x)$, on aura une ordonnée $\varphi(\alpha)$ plus grande que l'ordonnée r^n du point P; car $\varphi(x)$ étant une fonction omale croissante, si l'on a $\alpha > r$, il faut qu'on ait aussi $\varphi(\alpha) > \varphi(r)$, ou $\varphi(\alpha) > r^n$. Fig. 3.

Soit n le point de la courbe $y = \varphi(x)$ qui répond à l'abscisse $x = \alpha$; si on mène par le point n une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m la courbe $y = x^n$, l'abscisse correspondante au point m étant nommée α', l'ordonnée en m sera $(\alpha')^n$; ainsi on aura $(\alpha')^n = \varphi(\alpha)$, et par conséquent $\alpha' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}$.

Comme on a $\varphi(\alpha) > r^n$, il s'ensuit qu'on a aussi $\alpha' > r$; mais α' est plus approchée de r que α.

L'abscisse α' détermine sur la courbe $y = \varphi(x)$ un second point n' dont l'ordonnée est $\varphi(\alpha')$; si par ce point on mène une parallèle à la ligne des abscisses qui rencontre en m' la courbe $y = x^n$, l'abscisse correspondante au point m' étant nommée α'', on aura $\alpha'' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha')}$, et l'abscisse α'' sera encore plus grande que celle qui répond au point d'intersection P, mais elle doit en approcher plus que α'.

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails, et on voit qu'en partant de la limite supérieure $\alpha > x$, si on calcule les termes successifs α', α'', etc. par les formules

$$\alpha' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}, \quad \alpha'' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha')}, \quad \alpha''' = \sqrt[n]{\varphi(\alpha'')}, \quad \text{etc.},$$

la plus grande racine positive r de l'équation proposée sera la limite vers laquelle convergent les termes de la série décroissante α, α', α'', α''', etc..

Cette suite devra être plus ou moins prolongée, selon qu'on veut obtenir une plus ou moins grande approximation; mais en général la convergence deviendra manifeste après un petit nombre de termes.

(43) Les premiers termes de la suite α, α', α'', etc. pouvant être fort éloignés de la racine que l'on cherche, il ne sera pas nécessaire de calculer avec beaucoup de précision ces premiers termes; mais lorsque deux termes consécutifs commenceront à différer peu l'un de l'autre, il faudra augmenter progressivement le nombre des décimales, jusqu'à ce qu'on obtienne deux termes consécutifs qui ne diffèrent que dans l'ordre de décimales qu'on veut négliger. Pour parvenir plus promptement au résultat, on pourra employer le moyen suivant.

Désignons par α, α', α'' les trois dernières valeurs approchées de r; aux points de l'axe qui correspondent à ces abscisses, menons des ordonnées p, p', p'' égales respectivement aux distances mn', $m'n''$, $m''n'''$, qui ont pour expression $\alpha^n - \varphi(\alpha)$, $\alpha'^n - \varphi(\alpha')$, $\alpha''^n - \varphi(\alpha'')$; faisons passer une courbe parabolique par les extrémités de ces ordonnées, et soit $y = A - Bz + Cz^2$ l'équation de cette courbe, z étant l'abscisse comptée du point où $x = \alpha$. On aura, pour déterminer A, B, C, les équations

$$\begin{aligned} p &= A, \\ p' &= A - B(\alpha - \alpha') + C(\alpha - \alpha')^2, \\ p'' &= A - B(\alpha - \alpha'') + C(\alpha - \alpha'')^2. \end{aligned}$$

Faisant ensuite $y = 0$, on aura

$$z = \frac{2A}{B + \sqrt{(B^2 - 4AC)}};$$

d'où l'on tire l'abscisse cherchée du point d'intersection $r = \alpha - z$.

(44) Si l'équation proposée ne devait avoir aucune racine positive, on trouverait que la suite α, α', α'', α''', etc. n'a point de limite, et que les termes décroissent successivement jusqu'à devenir nuls. On n'en conclura cependant pas qu'il y a une racine égale à zéro, car cette racine est toujours exclue.

On peut d'ailleurs, pour abréger le calcul, chercher d'avance la limite inférieure des racines positives. Il faut pour cela faire $x = \frac{1}{z}$, et après avoir trouvé, par la méthode de l'article 35, la limite supérieure de z, qu'on appellera λ, on en conclura que la plus petite valeur positive de x est $> \frac{1}{\lambda}$. Donc, dès que la suite α, α', α'', etc. descendra jusqu'à un terme $< \frac{1}{\lambda}$, on sera sûr que la racine cherchée n'existe pas. Ce procédé s'applique au cas où, ayant déjà déterminé toutes les racines positives r, r', r'', r''', etc., la recherche d'une racine de plus doit conduire à une impossibilité.

Manière de trouver les autres racines positives de la même équation.

(45) La plus grande racine r étant trouvée, nous chercherons d'abord celle qui la suit immédiatement par ordre de grandeur, et que nous désignerons par r'.

Pour cela, le moyen le plus simple est de revenir à l'équation primitive $X = 0$, et de diviser son premier membre par $x - r$; on aura l'équation du degré $n-1$ qui contient les autres racines, parmi lesquelles celle que nous cherchons maintenant, et que nous avons désignée par r', est la plus grande.

La nouvelle équation à résoudre pourra être mise sous la forme $x^{n-1} = \psi(x)$, $\psi(x)$ étant une fonction omale de x. On procédera donc à sa résolution par la même méthode qui a été suivie pour l'équation $x^n = \varphi(x)$, et en observant que la limite des racines est connue d'avance, puisqu'on doit avoir $r' < r$.

Il est clair qu'en continuant ces opérations on trouvera successivement les autres racines positives r'', r''', etc., s'il en existe : et lorsque la racine cherchée n'existe pas, le calcul en manifestera de lui-même l'impossibilité, comme nous l'avons remarqué dans l'article 44.

(46) La division de l'équation proposée par $x - r$ peut s'exécuter de la manière suivante.

En prenant la même valeur de $\varphi(x)$ que dans l'article 42, l'équation proposée $x^n = \varphi(x)$, exprimée de la manière ordinaire, est

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \text{etc.} = ax^{n-k} + bx^{n-k-1} + cx^{n-k-2} + \text{etc.}$$

Soit le premier membre $= P(x-r)+p$, et le second $= Q(x-r)+q$, p et q étant les restes de la division des deux membres par $x-r$; puisque la valeur $x=r$ satisfait à l'équation, on devra avoir $p=q$, et par conséquent l'équation du degré $n-1$ qui reste à résoudre, est $P=Q$.

Soit

$$P = x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + h'x^{n-4} + \text{etc.},$$
$$Q = a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.};$$

on aura évidemment

$$\begin{aligned} f' &= f + r, & a' &= a, \\ g' &= g + f'r, & b' &= b + a'r, \\ h' &= h + g'r, & c' &= c + b'r, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous aurons donc l'équation

$$x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + \text{etc.} = a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.},$$

que l'on peut mettre sous la forme $x^{n-1} = \varphi_1(x)$, en prenant une nouvelle fonction omale $\varphi_1(x)$, ainsi exprimée :

$$\varphi_1(x) = \frac{a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + c'x^{n-k-3} + \text{etc.}}{1 + \frac{f'}{x} + \frac{g'}{x^2} + \text{etc.}}.$$

Il faut observer cependant que comme le polynome $x^{n-1} + f'x^{n-2} + g'x^{n-3} + \text{etc.}$, contiendra nécessairement toutes les puissances de x inférieures à $n-1$, il y aura des réductions à effectuer entre les derniers termes de ce polynome et ceux du polynome $a'x^{n-k-1} + b'x^{n-k-2} + \text{etc}$: En général, dans la valeur de $\varphi_1(x)$ il faudra réduire le terme Mx^{n-k-i}, pris dans le numérateur, avec le terme Nx^{-k-i}, pris dans le dénominateur, et porter la différence des coefficiens où il y aura excès, c'est-à-dire mettre $(M-N)x^{n-k-i}$ dans le numérateur, si on a $M>N$, et $(N-M)x^{-k-i}$ dans le dénominateur, si on a $M<N$.

Cette opération étant faite, on aura à résoudre l'équation $x^{n-1}=\varphi_1(x)$,

dont on sait que la plus grande racine r' doit être $< r$. Connaissant cette seconde racine r', on procédera semblablement pour avoir la troisième r'', et les suivantes, s'il y a lieu.

(47) La méthode que nous venons d'indiquer s'applique de même aux racines négatives ; ainsi on peut trouver par son moyen toutes les racines réelles d'une équation numérique : peut-être cette méthode est-elle ce qu'on peut proposer de plus simple et de plus général pour la résolution des équations numériques, au moins tant qu'il n'y a pas de circonstance particulière qui puisse aider à trouver les racines.

On pourrait, sans changer la forme de l'équation proposée $x^n = \varphi(x)$, trouver successivement toutes ses racines, au moyen d'une construction géométrique qui ferait connaître les divers points d'intersection P, P', P'', etc. des deux courbes $y = x^n$, $y = \varphi(x)$; mais la détermination du second point P', et en général de tous ceux qui ont un rang pair, serait beaucoup moins facile que celle du premier point P et de tous ceux dont le rang est impair. Et puisque tout embarras peut être évité par les divisions successives ou les opérations équivalentes que nous avons indiquées, nous nous abstiendrons d'entrer dans d'autres détails sur ces recherches.

Seconde méthode pour la résolution des équations numériques.

(48) Etant proposé l'équation du degré n,

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + hx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

dont nous désignerons le premier membre par $F(x)$, prenons un nombre n de facteurs $1 + x$, $2 + x$, $3 + x$, ... $n + x$, et supposons que le premier membre soit divisé par le produit de tous ces facteurs ; on aura d'abord le quotient 1 égal au coefficient du premier terme, ensuite on pourra supposer que le reste est décomposé en fractions partielles, de manière que l'équation proposée prendra la forme

$$1 + \frac{(1)}{1+x} + \frac{(2)}{2+x} + \frac{(3)}{3+x} \cdots + \frac{(n)}{n+x} = 0,$$

dans laquelle (1), (2), (3), etc. sont des coefficiens qu'on déterminera de la manière suivante.

Soit en général $x+k$ l'un des facteurs $x+1$, $x+2 \ldots . x+n$, et $Q(x)$ le produit de tous les autres; on pourra faire

$$\frac{F(x)}{(x+k)Q(x)} = 1 + \frac{(k)}{x+k} + \frac{P}{Q(x)},$$

ce qui donne $k = \frac{F(x)-(x+k)P-(x+k)Q(x)}{Q(x)}$. Soit, dans cette équation, $x=-k$, on aura

$$(k) = \frac{F(-k)}{Q(-k)};$$

c'est l'expression générale du numérateur de la fraction partielle qui a pour dénominateur $k+x$.

Dans cette expression, $Q(-k)$ est le produit de tous les facteurs $(1-k)(2-k)(3-k)\ldots.(n-k)$, excepté celui qui devient zéro pour une valeur déterminée de k. Ainsi on aura successivement

$$Q(-1) = 1.2.3 \ldots . n-1,$$
$$Q(-2) = -\frac{1}{n-1}Q(-1),$$
$$Q(-3) = \frac{1.2}{n-1.n-2}Q(-1),$$
$$Q(-4) = -\frac{1.2.3}{n-1.n-2.n-3}Q(-1),$$
etc.

De sorte que $Q(-k)$ sera positif pour toutes les valeurs impaires de k, et négatif pour les valeurs paires.

Si $F(x)$ reste constamment positif pour toutes les suppositions $x=-1$, -2, $-3 \ldots . -n$, il est visible que le coefficient (k) aura le même signe que $Q(-k)$, c'est-à-dire qu'il sera positif pour toutes les valeurs impaires de k, et négatif pour toutes les valeurs paires.

Le contraire aura lieu si $F(x)$ reste constamment négatif dans toutes ces suppositions.

Mais cet ordre sera troublé si $F(x)$ ne conserve pas le même signe, dans les diverses suppositions $x=-1$, -2, $-3 \ldots -n$; en général, si $F(-k)$ et $F(-k+1)$ sont de signes contraires, ce qui indiquerait une racine négative entre $x=-k$ et $x=-k-1$, les coefficiens (k), $(k+1)$ seront de même signe; et ils seront toujours de signes différens si $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de même signe.

(49) Désignons en général par $\frac{A}{a+x}$, $\frac{A'}{a'+x}$, $\frac{A''}{a''+x}$, etc. les termes $\frac{(k)}{k+x}$, dans lesquels (k) est positif, et par $-\frac{B}{b+x}$, $-\frac{B'}{b'+x}$, $-\frac{B''}{b''+x}$, etc. ceux dans lesquels (k) est négatif; si on fait

$$\varphi(x) = \frac{A}{a+x} + \frac{A'}{a'+x} + \frac{A''}{a''+x} + \text{etc.},$$
$$\psi(x) = \frac{B}{b+x} + \frac{B'}{b'+x} + \frac{B''}{b''+x} + \text{etc.},$$

l'équation proposée se réduira à la forme

$$1 + \varphi(x) = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux fonctions omales décroissantes de x.

Cette équation peut aussi être représentée par

$$1 + \int \frac{A}{a+x} = \int \frac{B}{b+x},$$

en désignant par $\int \frac{A}{a+x}$ la somme des termes qui composent $\varphi(x)$, et par $\int \frac{B}{b+x}$ une somme semblable pour $\psi(x)$.

Suivant ce qui a déjà été dit, on voit, 1°. que les diverses valeurs de a seront tous les nombres impairs, et les diverses valeurs de b tous les nombres pairs moindres que n, si $F(-k)$ est constamment positif; 2°. que l'inverse aura lieu si $F(-k)$ est constamment négatif; 3°. que cet ordre ne peut être troublé que lorsque $F(-k)$ et $F(-k-1)$ sont de signes différens, auquel cas les deux termes qui ont pour dénominateurs $k+x$, $k+1+x$ appartiennent à une même fonction $\varphi(x)$ ou $\psi(x)$. Donc quand il arrive que deux dénominateurs consécutifs $k+x$, $k+1+x$ se trouvent dans la même fonction $\varphi(x)$ ou $\psi(x)$, on en doit conclure qu'il y a une racine négative entre $x=-k$ et $x=-k-1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer immédiatement. En effet, supposons, par exemple, que dans $\varphi(x)$ se trouvent les deux termes $\frac{A''}{3+x} + \frac{A'''}{4+x}$; si on fait successivement $x=-3-\omega$, $x=-4+\omega$, ω étant infiniment petit, on obtient deux résultats, dont l'un est infini positif et l'autre infini négatif. Donc il y a une racine entre -3 et -4.

(50) Maintenant pour procéder à la résolution de l'équation ainsi exprimée par deux fonctions omales simples, il faut imaginer qu'on construise, dans le sens des x positifs seulement, les deux courbes qui ont pour équations $y = 1 + \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, et les diverses intersections de ces courbes donneront les diverses racines positives qu'on veut déterminer. Prenons d'abord une idée de la figure de ces courbes.

Fig. 4 et 5. Soit OX la ligne des abscisses commune aux deux courbes, O l'origine des x; la première et la plus grande ordonnée de la courbe $y = 1 + \varphi(x)$ est représentée par $OA = 1 + \varphi(0)$. Passé le point A, l'ordonnée diminue de plus en plus, à mesure que l'abscisse augmente; elle finit par être égale à 1, lorsqu'on fait $x = \infty$. Ainsi en prenant $OC = 1$, et menant par le point C une parallèle à la ligne des abscisses, cette parallèle CL sera l'asymptote de la courbe $y = 1 + \varphi(x)$.

L'autre courbe $y = \psi(x)$, représentée par BPL, a pour première et plus grande ordonnée $BO = \psi(0)$. Passé le point B, l'ordonnée diminue continuellement et devient zéro lorsque $x = \infty$. Cette courbe a donc pour asymptote la ligne des x.

(51) De cette description sommaire on peut déjà tirer plusieurs conséquences relatives au nombre et à la limite supérieure des racines positives.

1°. Si l'on veut déterminer le point L où la courbe $y = \psi(x)$ rencontre la droite CL qui est l'asymptote de l'autre courbe $y = 1 + \varphi(x)$, il faudra résoudre l'équation omale

$$1 = \psi(x).$$

Soit λ la valeur de x tirée de cette équation, par la méthode de l'art. 40; il est évident que s'il y a des intersections entre les deux courbes, elles ne peuvent avoir lieu qu'en deçà du point L. Donc λ est plus grande que la plus grande racine de l'équation proposée.

Si donc l'équation proposée doit avoir m racines positives, il faut que l'arc BL soit coupé en m points par l'autre courbe. Ces intersections ne peuvent guère être rendues sensibles dans la construction graphique des deux courbes, convexes d'un même côté, à moins d'opérer sur une très-grande échelle; mais il suffit pour notre objet d'en concevoir la possibilité.

Fig. 4. 2°. Si l'ordonnée du point B est plus grande que celle du point A,

c'est-à-dire, si l'on a $\psi(0) > 1 + \varphi(0)$, il y aura nécessairement au moins une intersection. En général le nombre des intersections, qui est celui des racines positives de l'équation proposée, devra être impair, puisque la courbe BL, qui d'abord est élevée au-dessus de l'autre courbe, passe nécessairement au-dessous dans la région du point L.

3°. On ne peut avoir $\psi(0) = 1 + \varphi(0)$, c'est-à-dire que le point B ne peut pas coïncider avec le point A, parce qu'alors on aurait la racine $x = 0$, cas qui est exclu, ainsi que celui où l'équation proposée aurait des racines égales.

4°. Il ne reste donc à considérer que le cas de $\psi(0) < 1 + \varphi(0)$. Alors le point B étant situé au-dessous de A, s'il y a une première intersection, il y en aura nécessairement une seconde, et en général le nombre des intersections devra être pair. Fig. 5.

5°. S'il arrivait qu'on eût $\Psi(0) < 1$, le point B tomberait au-dessous de C; il n'y aurait donc alors aucune intersection, ni par conséquent aucune racine positive.

(52) Voici donc les symptômes des différens cas généraux qui peuvent avoir lieu.

1°. Si l'on a $\psi(0) > 1 + \varphi(0)$, l'équation proposée aura au moins une racine positive; elle pourra en avoir trois, cinq, et en général un nombre impair.

2°. Si l'on a $\psi(0) < 1 + \varphi(0)$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive, ou elle en aura un nombre pair.

3°. Si l'on a $\psi(0) < 1$, l'équation proposée n'aura aucune racine positive.

Venons maintenant à la résolution effective de l'équation proposée: elle consiste à déterminer les valeurs numériques des racines positives, ou à prouver qu'il n'existe aucune de ces racines.

Il y a deux manières de faire ces calculs; l'une en commençant par la plus grande racine, l'autre en commençant par la plus petite. Nous allons exposer ces deux moyens successivement.

Recherche de la plus grande racine.

(53) On connaît déjà la limite λ de la plus grande racine, par la résolution de l'équation omale $1 = \psi(x)$; cette limite est l'abscisse du point L. Fig. 6.

Soit k le point de la courbe $y = 1 + \varphi(x)$ qui a la même abscisse que le point L ; si par le point k on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i la courbe $y = \psi(x)$, et qu'on appelle α l'abscisse du point i, on déterminera α en résolvant l'équation $1 + \varphi(\lambda) = \psi(\alpha)$.

Soit ensuite k' le point de la courbe Pk qui a la même abscisse que le point i, et dont l'ordonnée est par conséquent $1 + \varphi(\alpha)$; si par le point k' on mène une parallèle à l'axe qui rencontre en i' la courbe $y = \psi(x)$, et qu'on appelle α' l'abcisse du point i', on déterminera α' par l'équation $1 + \varphi(\alpha) = \psi(\alpha')$.

De là on voit qu'il faut calculer successivement les quantités λ, α, α', α'', etc. par la résolution des équations

$$\begin{aligned} 1 &= \psi(\lambda); \\ 1 + \varphi(\lambda) &= \psi(\alpha), \\ 1 + \varphi(\alpha) &= \psi(\alpha'), \\ 1 + \varphi(\alpha') &= \psi(\alpha''), \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

et le dernier terme de la suite décroissante λ, α, α', α'', etc. sera la valeur de la racine cherchée r.

Nous remarquerons comme ci-dessus, que le calcul des termes λ, α, α', α'', etc. n'exige beaucoup de précision que lorsqu'on est parvenu à deux termes consécutifs très-peu différens l'un de l'autre.

Nous remarquerons encore qu'au moyen du dernier terme trouvé, qui approche déjà beaucoup de la valeur de x, on peut achever le calcul de la manière suivante.

Soit p ce dernier terme, et soit $x = p - \omega$, ω ne pouvant être qu'une très-petite quantité, si on substitue cette valeur dans l'équation proposée $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, le résultat sera de la forme

$$\epsilon = F\omega + G\omega^2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \varphi(p) - \psi(p), \\ F &= \int \frac{B}{(b+p)^2} - \int \frac{A}{(a+p)^2}, \\ G &= \int \frac{B}{(b+p)^3} - \int \frac{A}{(a+p)^3}. \end{aligned}$$

On aura donc, en négligeant seulement les quantités de l'ordre ϵ^3,

$$\omega = \frac{E}{F} - \frac{G\epsilon^2}{F^3},$$

et de là $x = p - \omega$.

Détermination de la plus petite racine.

(54) Il y a deux cas à considérer, selon que $1 + \varphi(0)$ est plus petit ou plus grand que $\psi(0)$.

Premier cas, $1 + \varphi(0) < \psi(0)$. Alors le point A, origine de la courbe $y = 1 + \varphi(x)$, étant situé au-dessous du point B, origine de la courbe $y = \psi(x)$, je mène Ab parallèle à l'axe qui rencontre en b l'autre courbe. Soit α l'abscisse du point b, on trouvera α en résolvant l'équation omale $1 + \varphi(0) = \psi(\alpha)$, et α sera une première approximation vers la moindre racine $x = r$ qui est l'abcisse du premier point d'intersection P. Fig. 4.

L'ordonnée menée au point b coupe la courbe inférieure en un point a dont l'ordonnée $= 1 + \varphi(\alpha)$. Par le point a menons une parallèle à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b'; si on appelle α' l'abscisse du point b', on trouvera α' par la résolution de l'équation $1 + \varphi(\alpha) = \psi(\alpha')$. Continuant ainsi indéfiniment, on voit que l'abscisse qui convient au point d'intersection P, sera le dernièr terme de la suite $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc.

Donc pour avoir la plus petite racine $x = r$, il faut déterminer successivement les termes α, α', α'', etc. par la résolution des équations omales

$$1 + \varphi(0) = \psi(\alpha),$$
$$1 + \varphi(\alpha) = \psi(\alpha'),$$
$$1 + \varphi(\alpha') = \psi(\alpha''),$$
$$\text{etc.},$$

et la dernière des quantités croissantes $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., ou la limite vers laquelle tendent ces quantités, sera la racine cherchée $x = r$.

(55) *Second cas*, $1 + \varphi(0) > \psi(0)$. Alors le point B étant situé au-dessous de A, on mènera par le point B une parallèle à l'axe qui rencontrera en a la courbe supérieure AP. Soit α l'abscisse du point a, on trouvera α en résolvant l'équation omale $\psi(0) = 1 + \varphi(\alpha)$, et α sera une première approximation vers la racine cherchée. Fig. 5.

L'ordonnée au point a rencontre la courbe inférieure en un point b dont l'ordonnée $= \psi(\alpha)$. Par le point b menons une parallèle à l'axe qui rencontre en a' la courbe supérieure ; si l'on appelle α' l'abscisse du point a', on trouvera α' en résolvant l'équation omale $\psi(\alpha) = 1 + \varphi(\alpha')$.

On voit maintenant, sans entrer dans de plus grands détails, que si on détermine successivement les termes α, α', α'', etc., par les équations

$$\psi(0) - 1 = \varphi(\alpha),$$
$$\psi(\alpha) - 1 = \varphi(\alpha'),$$
$$\psi(\alpha') - 1 = \varphi(\alpha''),$$
$$\text{etc.};$$

le dernier terme de la suite α, α', α'', etc. sera la valeur cherchée de la plus petite racine $x = r$.

(56) Dans les deux cas, la difficulté se réduit toujours à résoudre un certain nombre d'équations omales simples, par les formules de l'art. 40. Nous avons d'ailleurs observé que les premiers termes de la suite α, α', α'', etc. n'ont pas besoin d'être calculés avec beaucoup de précision ; ainsi, à cet égard, les calculs peuvent être notablement abrégés. On voit ensuite par la nature de ces opérations, que les points a, a', a''; s'approchent rapidement du point d'intersection P; de sorte qu'on n'aura jamais à résoudre qu'un petit nombre d'équations omales simples. D'ailleurs la détermination de la limite pourra être abrégée, si on le juge à propos, par le procédé de l'art. 53.

Il pourra arriver aussi qu'on sache d'avance que la racine cherchée r est plus grande qu'une quantité connue λ; dans ce cas, on partira de la valeur $\alpha = \lambda$ pour déterminer toutes les autres α', α'', etc., ce qui abrègera le calcul.

Nous observerons encore que dans le second cas, il pourrait arriver qu'on ne trouvât pas de solution ; alors la suite $\psi(\alpha)$, $\psi(\alpha')$, $\psi(\alpha'')$, etc., dont le premier terme est > 1, en offrirait bientôt un < 1, ce qui prouverait qu'il n'y a aucune intersection entre les deux courbes, ni par conséquent aucune racine positive de l'équation proposée.

La détermination de la plus petite racine peut être effectuée par une suite plus convergente que celle dont nous venons de montrer l'usage ; mais avant d'exposer cette seconde solution, nous avons à résoudre le problème suivant.

De l'intersection d'une droite quelconque avec la courbe omale $y = \psi(x)$.

(57) Soit BNG la courbe décrite d'après l'équation $y = \psi(x)$; Fig. 7.
$\psi(x)$ étant une fonction omale simple qu'on peut représenter par $\int \frac{B}{b+x}$. Soit F un point donné sur le prolongement de l'ordonnée du point N; si par le point F on mène sous un angle donné NFG, la droite FG qui rencontre la courbe au point G, il s'agit de déterminer l'abscisse du point G.

Soit f l'abscisse donnée du point F, la distance donnée $FN = c$, et m la tangente de l'angle que fait la droite FG avec l'axe; si on appelle x l'abscisse du point G, on aura pour déterminer x, l'équation

$$m = \frac{c + \psi(f) - \psi(x)}{x - f}.$$

Or je remarque que le second membre de cette équation est une fonction omale décroissante de x; car à mesure que x augmente, ou à mesure que le point G avance sur la courbe dans le sens des x, il est visible que le second membre qui représente la tangente de l'angle que fait FG avec la parallèle à l'axe menée par le point F, diminue continuellement. Au reste cette fonction peut être présentée sous une forme entièrement développée; car ayant fait $\psi(x) = \int \frac{B}{b+x}$, si on observe que $\frac{B}{b+x} = \frac{B}{b+f} - \frac{B(x-f)}{(b+f)(b+x)}$, on pourra faire

$$\psi(x) = \int \frac{B}{b+f} - (x-f) \int \frac{B}{(b+f)(b+x)};$$

et comme $\int \frac{B}{b+f}$ est la même chose que $\psi(f)$, l'équation à résoudre se réduira à cette forme

$$(1) \qquad m = \frac{c}{x-f} + \int \frac{C}{b+x},$$

où l'on a fait, pour abréger, $C = \frac{B}{b+f}$.

Comme x doit être plus grand que f, on voit que le second membre de cette équation est en effet une fonction omale simple de x, à compter de $x = f$; j'observe de plus que cette fonction étant infinie

lorsque $x = f$, et nulle lorsque $x = \infty$, l'équation sera toujours possible, quel que soit m, pourvu qu'il soit positif; c'est-à-dire, pourvu que la droite FG soit menée par le point F, de manière à rencontrer l'axe dans la partie indéfinie fX.

Nous remarquerons encore que si l'on a $c = 0$, ou si le point F coïncide avec le point N, alors l'équation à résoudre devient

$$(2) \qquad m = \int \frac{c}{b+x};$$

c'est l'équation qui détermine le point d'intersection de la courbe $y = \psi(x)$, avec la droite menée par un point N de cette courbe, ensorte qu'elle fasse avec l'axe des x, un angle dont la tangente $= m$.

(58) Dans le cas où c n'est pas nulle, la résolution de l'équation (1) se rapporte à l'art. 41, et il faudra, pour effectuer la solution, connaître une première valeur approchée de x. Or puisqu'on doit avoir $m > \frac{c}{x-f}$, il en résulte $x > f + \frac{c}{m}$: on peut donc partir du premier terme $k = f + \frac{c}{m}$, pour calculer successivement les autres termes k', k'', etc., dont la limite est la valeur cherchée de x.

(59) On peut encore déterminer l'abscisse du point d'intersection G par le procédé suivant.

Par le point N menez une parallèle à l'axe qui rencontre la droite FG en I; du point I abaissez une perpendiculaire à l'axe qui rencontrera la courbe au point N'; par le point N' menez de même $N'I'$ parallèle à l'axe, puis $I'N''$ perpendiculaire, et ainsi de suite. Soit f' l'abscisse du point N', f'' celle du point N'', etc., on calculera les termes successifs f', f'', etc. par les formules

$$\begin{aligned} f' &= f + \frac{c}{m}, \\ f'' &= f' + \frac{\psi(f) - \psi(f')}{m}, \\ f''' &= f'' + \frac{\psi(f') - \psi(f'')}{m}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et il est visible que la limite vers laquelle tendent les termes de la suite f, f', f'', etc. sera la valeur cherchée de l'abscisse du point G.

Cette méthode est plus simple que la précédente; mais elle ne peut être employée lorsque $c=0$; elle ne peut pas l'être non plus lorsque $m=0$, c'est-à-dire lorsque la droite FG est parallèle à l'axe, parce qu'il n'y a point d'intersection dans le sens où x est $>f$.

Seconde manière de déterminer la plus petite racine.

(60) Nous supposerons qu'on a $\psi(0) > 1+\varphi(0)$, parce que, dans ce cas, l'équation $1+\varphi(x)=\psi(x)$ a toujours au moins une racine positive.

Par le premier point B de la courbe $y=\psi(x)$, soit menée la tangente Ba qui rencontre en a la courbe $y=1+\varphi(x)$, et soit α l'abscisse du point a, on trouvera, par la formule de l'art. 57, que α est la racine de l'équation Fig. 8.

$$-\psi'(0)=\frac{c}{x}+\int\frac{A}{a(a+x)},$$

dans laquelle on a $c=\psi(0)-1-\varphi(0)$, et où la fonction omale $\int\frac{A}{a(a+x)}$ est déduite de la fonction $\varphi(x)=\int\frac{A}{a+x}$, en divisant chaque terme de celle-ci par la valeur correspondante de a.

On appliquera donc à cette équation les formules de l'art. 40, en prenant pour première valeur de k, d'après l'art. 41, $k=\frac{c}{-\psi'(0)}$.

Par le point a ainsi déterminé, menez une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la courbe supérieure en b; au point b menez la tangente ba' qui rencontre la courbe inférieure en a', et ainsi de suite.

Si on appelle α', α'', etc. les abscisses des points a', a'', etc., on trouvera que les différens termes α, α', α'', etc. se déterminent par la résolution des équations successives

$$-\psi'(0)=\frac{\psi(0)-1-\varphi(0)}{x}+\int\frac{A:a}{a+x},\quad \text{d'où}\quad x=\alpha,$$
$$-\psi'(\alpha)=\frac{\psi(\alpha)-1-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}+\int\frac{A:(a+\alpha)}{a+x},\quad \text{d'où}\quad x=\alpha',$$
$$-\psi'(\alpha')=\frac{\psi(\alpha')-1-\varphi(\alpha')}{x-\alpha'}+\int\frac{A:(a+\alpha')}{a+x},\quad \text{d'où}\quad x=\alpha'',$$
etc.,

et la limite vers laquelle convergent les termes de la suite croissante α, α', α'', etc., sera la valeur de la plus petite racine cherchée.

Au reste ces formules étant moins simples que celle de l'art. 54, nous nous bornerons au cas qui vient d'être résolu, et nous n'examinerons pas celui où l'on aurait $\psi(0) < 1 + \varphi(0)$.

Connaissant la plus grande ou la plus petite racine positive, déterminer toutes les autres.

(61) On pourrait chercher successivement toutes les racines par les intersections des deux courbes que nous avons tracées, sans changer la forme de l'équation proposée qui détermine ces courbes. Mais il est beaucoup plus simple, après avoir trouvé la racine $x = r$, de supprimer de l'équation proposée le facteur $x - r$, afin d'avoir l'équation du degré immédiatement inférieur, qui contient les autres racines, et dans laquelle r sera la limite de la racine r' qui doit suivre immédiatement r. Voici le procédé qu'il convient de mettre en usage pour cet objet.

Nous avons supposé que l'équation proposée du degré n est divisée par le produit $(1+x)(2+x)\ldots\ldots(n+x)$, afin de mettre cette équation sous la forme $1 + \varphi(x) = \psi(x)$. Lorsque le degré de l'équation se réduit à $n-1$, on doit donc faire disparaître le plus grand dénominateur $n+x$, afin que le plus grand de ceux qui restent soit $n-1+x$, conformément au degré de l'équation. Pour cela il faut multiplier par $n+x$ les différens termes de l'équation $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, et faire ensorte que le produit soit divisible par $x - r$.

Or on a $\frac{A(n+x)}{a+x} = \frac{A(n+r)}{a+r} + \frac{A(n-a)(r-x)}{(a+r)(a+x)}$; donc si on fait $\frac{A(n-a)}{a+r} = A_1$, on aura

$$\varphi(x) = \int \frac{A}{a+x} = (n+r)\int \frac{A}{a+r} + (r-x)\int \frac{A_1}{a+x}.$$

De même en faisant $\frac{B(n-b)}{b+r} = B_1$, on aura

$$\psi(x) = \int \frac{B}{b+x} = (n+r)\int \frac{B}{b+r} + (r-x)\int \frac{B_1}{b+x}.$$

Substituant ces valeurs et observant qu'on a $\int \frac{A}{a+r} = \varphi(r)$ et $\int \frac{B}{b+r} = \psi(r)$, l'équation $1 + \varphi(x) = \psi(x)$ deviendra

$$n+x+(n+r)\varphi(r)+(r-x)\int \frac{A_1}{a+x} = (n+r)\psi(r)+(r-x)\int \frac{B_1}{b+x}.$$

Mais puisque la valeur $x = r$ satisfait à l'équation $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, on a $1 + \varphi(r) = \psi(r)$; effaçant donc dans l'équation précédente les termes qui se détruisent, et divisant le reste par $r - x$, il viendra

$$1 + \int \frac{B_1}{b+x} = \int \frac{A_1}{a+x}.$$

Cette équation qu'on peut mettre sous la forme $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, est entièrement semblable à la proposée ; mais elle a un terme de moins ; car par les valeurs des coefficiens A_1, B_1, on voit que le terme qui avait pour dénominateur $n + x$, disparaîtra, soit qu'il appartienne à la fonction $\varphi(x)$ ou à $\psi(x)$.

D'ailleurs on doit observer que comme n est le plus grand des nombres a et b, les coefficiens A_1 et B_1 seront toujours positifs, de sorte que le passage de l'équation proposée $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, à la suivante $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, qui contient une racine de moins, ne fait qu'ôter un terme de l'une des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, sans en faire passer aucun de l'une dans l'autre, comme cela aurait lieu si quelqu'un des coefficiens A_1, B_1 devenait négatif. Il n'y a que le terme constant 1 qui change de signe ou qui passe d'un membre dans l'autre.

(62) On voit donc que la division de l'équation proposée, par $x - r$, s'exécute par un procédé très-simple qui consiste à transposer le terme constant 1, et à remplacer dans chacun des termes $\frac{A}{a+x}$ et $\frac{B}{b+x}$, le coefficient A par $\frac{A(n-a)}{a+r}$, et le coefficient B par $\frac{B(n-b)}{b+r}$.

Maintenant nous n'avons aucune règle nouvelle à donner pour la résolution de l'équation $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$. On appliquera à cette équation les formules des articles 54 et suivans ; et sachant d'avance que la plus petite racine r' est $> r$, on parviendra plus facilement encore au résultat. Après avoir trouvé la racine r' qui est la seconde de l'équation proposée, on formera semblablement une troisième équation $1 + \varphi_2(x) = \psi_2(x)$, qui contiendra les $n - 2$ autres racines.

On aura donc ainsi successivement, par des équations qui se simplifient de plus en plus, les diverses racines positives r, r', r'', etc. de l'équation proposée, et ce calcul sera terminé lorsqu'on sera parvenu à une transformée qui n'est plus résoluble, ce qu'on reconnaîtra aux conditions que nous avons indiquées dans la solution générale.

(63) La même méthode fera connaître les racines négatives en partant de l'équation proposée, dans laquelle on changera le signe de x, et que l'on mettra ensuite sous la forme $1 + \varphi(x) = \psi(x)$. Mais il sera plus simple de prendre la dernière des transformées $1 + \psi_1(x) = \varphi_1(x)$, $1 + \varphi_2(x) = \psi_2(x)$, etc., laquelle ne contient plus de racines positives, mais peut en contenir de négatives. Pour obtenir celles-ci, on réduira cette transformée à la forme ordinaire, débarrassée de fractions, et après avoir changé le signe de x, on lui appliquera la méthode du n° 48, pour la réduire de nouveau à la forme $1 + \varphi(x) = \psi(x)$, dont il faudra chercher les racines positives.

(64) Il reste donc à faire voir comment on peut résoudre une équation qui n'a que des racines imaginaires; mais ce problème est beaucoup plus difficile que celui qui consiste à trouver les racines réelles, et nous ne nous flattons pas que les méthodes précédentes fournissent de grands secours pour sa solution. Il est vrai qu'on pourrait trouver les racines imaginaires d'une équation du degré n, au moyen des racines réelles d'une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais pour peu que n surpasse 4, l'extrême complication d'une telle transformée et des calculs nécessaires pour y parvenir, rend l'usage de ce moyen tout-à-fait illusoire. C'est donc dans l'équation proposée elle-même, et non dans une transformée d'un ordre plus élevé, qu'il faut chercher les moyens d'obtenir les valeurs numériques des racines imaginaires. Nous avons déjà indiqué, pag. 151 du Traité précédent, une méthode qui aurait l'avantage de conduire assez facilement à ce but, si on pouvait donner quelques lumières au calculateur sur le choix de la première valeur hypothétique de la racine exprimée par $\alpha + 6\sqrt{-1}$ ou $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$. Mais en attendant que cette méthode reçoive les améliorations dont elle est susceptible, nous allons donner les formules qui, dans l'application de la méthode précédente, conviennent au cas des racines imaginaires; et d'abord une racine imaginaire étant représentée par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, nous chercherons les limites de la quantité r, qui est en quelque sorte la mesure de grandeur ou le *module* de cette racine, puisque la valeur d'une puissance quelconque m de x ne peut jamais surpasser r^m, mais peut en différer aussi peu qu'on voudra.

Limites de la quantité réelle qui sert de module aux racines imaginaires.

(65) L'équation proposée dont toutes les racines sont imaginaires, étant désignée par

$$x^n \pm A_1 x^{n-1} \pm A_2 x^{n-2} \pm A_3 x^{n-3} \ldots\ldots + A_n = 0,$$

si on suppose $x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, cette équation se partage en deux autres, savoir,

$$r^n \cos n\theta \pm A_1 r^{n-1}\cos(n-1)\theta \pm A_2 r^{n-2}\cos(n-2)\theta \ldots + A_n = 0,$$
$$r^n \sin n\theta \pm A_1 r^{n-1}\sin(n-1)\theta \pm A_2 r^{n-2}\sin(n-2)\theta \ldots \pm A_{n-1} r\sin\theta = 0.$$

Multipliant la première par $\cos n\theta$, la seconde par $\sin n\theta$, et ajoutant les produits, on a

$$r^n \pm A_1 r^{n-1}\cos\theta \pm A_2 r^{n-2}\cos 2\theta \ldots\ldots + A_n \cos n\theta = 0.$$

Or il est visible que l'hypothèse qui rendra r^n le plus grand, est celle où l'on aurait

$$r^n = A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + A_3 r^{n-3} \ldots\ldots + A_n,$$

les coefficiens A_1, A_2, A_3, etc. étant tous pris positivement dans le second membre, et alors en appliquant ce qui a été trouvé dans le cas des racines réelles, art. 35, on pourra en conclure,

1°. Que si A_1, coefficient du second terme, n'est surpassé en grandeur par aucun des autres coefficiens A_2, $A_3 \ldots\ldots A_n$, on a

$$r < 1 + A_1.$$

2°. Que si A_i et A_k sont les deux coefficiens pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands, on aura

$$r < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}:$$

telle est donc, dans ce cas, la limite supérieure de la quantité r qui sert de module aux racines imaginaires.

(66) Pour avoir la limite inférieure de cette même quantité, j'observe que l'équation proposée n'ayant, par hypothèse, que des racines imaginaires, son dernier terme A_n doit être le produit de toutes les quantités

r^2, r'^2, r''^2, etc., qui résultent des différentes couples de racines imaginaires. Soit donc r la plus grande des quantités r, r', r'', etc., et r^n ou ρ la plus petite, on aura

$$r > \sqrt[n]{A_n} \quad \text{et} \quad \rho < \sqrt[n]{A_n}:$$

le plus grand des modules r doit donc être compris entre les limites suivantes :

$$r > \sqrt[n]{A_n}, \quad r < \sqrt[i]{A_i} + \sqrt[k]{A_k}.$$

Quant aux limites du plus petit module ρ, nous n'avons encore que la supérieure $\rho < \sqrt[n]{A_n}$; mais il est aisé d'avoir la limite inférieure.

Pour cela il faut, dans l'équation proposée, faire $x = \frac{1}{z}$, ce qui donnera une équation de la forme

$$z^n \pm B_1 z^{n-1} \pm B_2 z^{n-2} \ldots\ldots + B_n = 0,$$

et il faudra considérer deux cas.

1°. Si B_1, coefficient du second terme, est au moins aussi grand qu'aucun autre coefficient, on aura, en prenant B_1 positivement, $z < 1 + B_1$.

2°. Si B_i et B_k sont les deux coefficiens pour lesquels $\sqrt[i]{B_i}$ et $\sqrt[k]{B_k}$ sont les plus grands, on aura, en appelant a et b ces deux radicaux, $z < a + b$.

Donc, dans le premier cas, on aura $\rho > \frac{1}{1 + B_1}$, et dans le second $\rho > \frac{1}{a + b}$.

Forme des équations à résoudre dans le cas des racines imaginaires.

(67) Soit $F(x) = 0$ l'équation proposée du degré n, dont toutes les racines sont imaginaires ; si on substitue pour x une valeur quelconque $x = k$, le premier membre $F(k)$ sera toujours une quantité positive. Il suit de là que si on procède comme dans l'article 48, et qu'on divise l'équation proposée par le produit des facteurs $1 + x$, $2 + x \ldots n + x$, afin de lui donner la forme $1 + \phi(x) = \psi(x)$, ou $1 + \int \frac{A}{a + x} = \int \frac{B}{b + x}$; les différentes valeurs de a seront les nombres impairs 1, 3, 5...$n-1$, tandis que celles de b seront les nombres pairs 2, 4, 6....n.

Ainsi, dans le cas des racines imaginaires, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont constamment de la forme suivante :

$$\varphi(x) = \frac{(1)}{1+x} + \frac{(3)}{3+x} + \frac{(5)}{5+x} \dots + \frac{(n-1)}{n-1+x},$$
$$\psi(x) = \frac{(2)}{2+x} + \frac{(4)}{4+x} + \frac{(6)}{6+x} \dots + \frac{(n)}{n+x},$$

de sorte qu'elles ont le même nombre de termes.

(68) Cela posé, si l'on fait $x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, on aura

$$\frac{A}{a+x} = \frac{A}{a + r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)} = \frac{A(a + r\cos\theta - \sqrt{-1}\,.\,r\sin\theta)}{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2},$$

et par conséquent

$$\int\frac{A}{a+x} = \int\frac{Aa}{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2} + r(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)\int\frac{A}{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2}.$$

De là on voit que l'équation $1 + \int\frac{A}{a+x} = \int\frac{B}{b+x}$ se partagera en deux autres, savoir,

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} 1 + \int\frac{Aa}{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2} &= \int\frac{Bb}{b^2 + 2br\cos\theta + r^2}, \\ \int\frac{A}{a^2 + 2ar\cos\theta + r^2} &= \int\frac{B}{b^2 + 2br\cos\theta + r^2}. \end{aligned}$$

Dans le premier membre, a aura toutes les valeurs impaires $1, 3, 5 \dots n-1$, et dans le second, b aura toutes les valeurs paires $2, 4, 6 \dots n$.

Telles sont donc les deux équations qu'il faut résoudre pour trouver les valeurs de r et de θ qui appartiennent à chaque couple de racines imaginaires.

Le nombre r est toujours positif : quant au nombre $r\cos\theta$, il peut être positif ou négatif; et à cet égard, on pourrait distinguer deux sortes de racines imaginaires, les unes positives lorsque la partie réelle $r\cos\theta$ est positive, les autres négatives lorsque cette partie est négative.

(69) Les équations précédentes peuvent être censées formées dans la supposition de $r\cos\theta$ positif. On pourrait en former de semblables dans la supposition de $r\cos\theta$ négatif. Pour cela il faudrait changer le signe de x dans l'équation proposée, et procéder de même, après ce

changement, pour réduire l'équation sous la forme $1+\int\frac{A}{a+x}=\int\frac{B}{b+x}$; ensuite on ferait $x=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, ce qui donnerait deux équations semblables aux équations (α), mais dont les coefficiens seront différens.

Ce qui semble nécessiter cette distinction, c'est que si on laissait les équations (α) sous la même forme lorsque $\cos\theta$ est négatif, la fonction $\int\frac{A}{a^2+2ar\cos\theta+r^2}$ ne serait plus une fonction omale de r. En effet, cette fonction étant différentiée par rapport à r, donnerait le coefficient différentiel

$$-\int\frac{2A(r+a\cos\theta)}{(a^2+2ar\cos\theta+r^2)^2},$$

lequel ne conserverait pas le même signe depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$, contre la nature des fonctions omales.

Il faudra donc, pour la solution complète de l'équation proposée, considérer deux systèmes semblables au système (α), et dans chacun desquels $\cos\theta$ sera supposé positif.

(70) Soit maintenant $r\cos\theta=p$, $r^2=q$, les deux équations à résoudre seront

$$1+\int\frac{Aa}{a^2+2ap+q}=\int\frac{Bb}{b^2+2bp+q},$$
$$\int\frac{A}{a^2+2ap+q}=\int\frac{B}{b^2+2bp+q};$$

on peut même les représenter plus simplement par

$$(\alpha')\qquad 1+\int\frac{Aa}{a^2+2ap+q}=0,\qquad \int\frac{A}{a^2+2ap+q}=0,$$

en convenant que A sera toujours positive pour toute valeur impaire $a=1, 3, 5\ldots\ldots n-1$, et négative pour toute valeur paire $a=2, 4, 6\ldots\ldots n$.

Ces équations sont d'une forme assez simple; cependant comme elles contiennent deux inconnues p et q, il ne paraît pas qu'on puisse les résoudre par une méthode analogue à celles que nous avons données pour le cas des racines réelles, qui n'offre qu'une inconnue.

Si donc on veut éviter les longueurs de l'élimination, par laquelle on pourrait réduire les deux inconnues à une seule, il faudra se borner à résoudre ces équations par une sorte de tâtonnement, en ne supposant autre chose, sinon que q ou r^2 est compris entre des limites données, et qu'on a toujours $p < \sqrt{q}$.

On pourrait ne trouver aucune solution pour les équations précédentes qui représentent le système (α); mais alors les deux équations semblables qui représentent l'autre système, dans la supposition que les racines imaginaires, c'est-à-dire leurs parties réelles, sont négatives, contiendraient nécessairement toutes les n racines imaginaires de l'équation proposée; de sorte que si la résolution ne réussissait pas dans un cas, elle réussira nécessairement dans l'autre.

On peut même ne point changer la forme des équations précédentes, et se contenter de changer le signe de p, ce qui reviendra au second système. En effet, la dernière forme (α'), sous laquelle nous avons mis les équations à résoudre, en employant les inconnues p et q au lieu de r et θ, n'a plus l'inconvénient remarqué dans l'art. 69, et les quatre fonctions

$$\int\frac{Aa}{a^2-2ap+q},\quad \int\frac{A}{a^2-2ap+q};\quad \int\frac{Bb}{b^2-2bp+q},\quad \int\frac{B}{b^2-2bp+q},$$

considérées tant par rapport à p que par rapport à q, sont toujours des fonctions omales, puisque p doit toujours être renfermé entre les limites $p=0$, $p=\sqrt{q}$.

(71) Supposons qu'après quelques essais on a trouvé des valeurs de p et q qui approchent de satisfaire aux équations (α'). Soient ces valeurs $p=f$, $q=g$, et supposons qu'elles donnent

$$1+\int\frac{Aa}{a^2+2af+g}=\mu,$$
$$\int\frac{A}{a^2+2af+g}=\nu,$$

μ et ν étant des quantités assez petites. Pour avoir des valeurs plus approchées on fera $p=f+\delta f$, $q=g+\delta g$, et on aura pour déterminer δf et δg, les équations

$$2\delta f\int\frac{Aa^2}{(a^2+2af+g)^2}+\delta g\int\frac{Aa}{(a^2+2af+g)^2}=-\mu,$$
$$2\delta f\int\frac{Aa}{(a^2+2af+g)^2}+\delta g\int\frac{A}{(a^2+2af+g)^2}=-\nu.$$

Soit, pour abréger,

$$F = \int \frac{A}{(a^2 + 2af + g)^2},$$
$$G = \int \frac{Aa}{(a^2 + 2af + g)^2},$$
$$H = \int \frac{Aa^2}{(a^2 + 2af + g)^2},$$

on aura

$$2H\delta f + G\delta g = -\mu,$$
$$2G\delta f + F\delta g = -\nu,$$

d'où l'on tire

$$\delta f = \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 - FH}, \quad \delta g = \frac{H\nu - G\mu}{G^2 - FH}.$$

Ainsi les valeurs corrigées de p et q sont

$$p = f + \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 - FH},$$
$$q = g + \frac{H\nu - G\mu}{G^2 - FH}.$$

Il faut observer, à l'égard des quantités F, G, H, qu'on a

$$Fg + 2Gf + H = \int \frac{A}{a^2 + 2af + g} = \nu,$$

faisant donc $H = -gF - 2fG + \nu$, et négligeant les termes qui contiendraient deux dimensions des quantités μ et ν, on aura

$$p = f + \frac{1}{2} \cdot \frac{F\mu - G\nu}{G^2 + 2fFG + gF^2}.$$
$$q = g - \left(\frac{G\mu + (gF + 2fG)\nu}{G^2 + 2fFG + gF^2}\right).$$

Ces valeurs serviront à leur tour à en faire connaître de plus approchées, s'il est nécessaire.

(72) Appelons de nouveau f et g les valeurs corrigées de p et q, on en déduira les deux racines imaginaires $x = f \pm \sqrt{(f^2 - g)}$. Pour avoir ensuite les autres racines de la même équation, il faut former l'équation qui les contient.

Soient $x = r'$, $x = r''$ les deux racines qu'on vient de déterminer, il faudra dans l'équation proposée $1 + \int \frac{A}{a + x} = 0$, remplacer le coeffi-

cient A par un nouveau coefficient

$$A_2 = \frac{(n-a)(n-1-a)}{(a+r')(a+r'')} A.$$

C'est en effet la conséquence qui résulte des formules de l'article 61; et comme on a $(a+r')(a+r'') = a^2 + 2af + g$, la valeur de A_2 sera

$$A_2 = \frac{(n-a)(n-a-1)}{a^2 + 2af + g} A.$$

Cela posé, la nouvelle équation du degré $n-2$ à résoudre sera

$$1 + \int \frac{A_2}{a+x} = 0;$$

et par la substitution $x = p \pm \sqrt{(p^2 - q)}$, cette équation se partage en deux autres, savoir,

$$1 + \int \frac{A_2 a}{a^2 + 2ap + q} = 0,$$
$$\int \frac{A_2}{a^2 + 2ap + q} = 0.$$

Ces équations sont entièrement semblables à celles de l'art. 70, mais elles contiennent chacune deux termes de moins, puisque les valeurs de A_2 qui répondent aux valeurs $a = n$, $a = n - 1$, sont nulles. Ainsi la dernière des valeurs de a sera $n-2$, parce qu'en effet l'équation à résoudre n'est que du degré $n-2$.

(73) Au moyen de cette analyse, on forme avec beaucoup de facilité les diverses équations qui restent successivement à résoudre, à mesure qu'on trouve deux des racines imaginaires de l'équation proposée. Le procédé pour passer d'un système au suivant, consiste à supprimer deux termes dans chacune des deux équations du système, et à modifier les coefficiens des autres termes suivant une loi constante. Ce procédé donne immédiatement le résultat qu'on obtiendrait en divisant l'équation proposée par le facteur correspondant aux deux racines trouvées, et mettant ensuite le quotient sous la forme qui convient à notre méthode.

Lorsque les opérations nécessaires pour obtenir les racines réelles sont terminées, et qu'il ne reste plus à résoudre qu'une équation de degré pair dont toutes les racines sont imaginaires, on est assuré

d'avance que la résolution est possible. Si donc la recherche qu'elle occasionne devient longue par les tâtonnemens qu'on ne peut guère éviter, au moins elle ne sera jamais infructueuse. D'ailleurs à mesure que les opérations avancent, elles se simplifient progressivement par la diminution du nombre des termes qui devient successivement $n-2$, $n-4$, $n-6$, etc., comme le degré de l'équation; et lorsqu'on est parvenu à une transformée du quatrième degré, la solution peut être achevée sans tâtonnement.

(74) La méthode que nous venons de développer est encore fort imparfaite; mais elle a quelques avantages particuliers qu'elle doit à la simplicité et à l'élégance des formules. Le plus considérable de ces avantages consiste en ce que, si l'on substitue différentes valeurs pour p ou q, afin d'en trouver qui satisfassent aux équations, la substitution se fait dans chaque dénominateur $a^2+2ap+q$, sans exiger aucune opération complexe.

Il n'en est pas de même lorsqu'en faisant $x=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, on a à substituer une nouvelle valeur de r ou une de θ, dans les équations dont ces inconnues dépendent, pag. 150. Ces substitutions exigent des opérations compliquées, surtout pour avoir les sinus et cosinus des multiples de θ: ce premier avantage est déjà très-grand.

Il y en a un second qui n'est pas moins remarquable. Il consiste en ce que les deux équations à vérifier se forment simultanément d'une manière très-simple. En effet, si en attribuant des valeurs particulières à p et q, on trouve chaque terme $\frac{Aa}{a^2+2ap+q}=\pm F(a)$, savoir, $+F(a)$ si a est impair, et $-F(a)$ si a est pair, la première des deux équations (α') étant ainsi formée,

$$\left.\begin{matrix} 1+F(1)+F(3)+F(5)\ldots\ldots+F(n-1) \\ -F(2)-F(4)-F(6)\ldots\ldots-F(n) \end{matrix}\right\}=0,$$

on en déduit immédiatement la seconde qui est

$$\left.\begin{matrix} F(1)+\frac{1}{3}F(3)+\frac{1}{5}F(5)\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}F(n-1) \\ -\frac{1}{2}F(2)-\frac{1}{4}F(4)-\frac{1}{6}F(6)\ldots\ldots-\frac{1}{n}F(n) \end{matrix}\right\}=0.$$

Il devient donc très-facile de vérifier les deux équations à la fois.

(75) Nous croyons avoir expliqué les méthodes précédentes avec assez de détails, pour qu'il soit superflu de produire des exemples de leur usage. Nous ferons seulement une observation générale qui pourra être utile dans les applications; c'est que si la grandeur des coefficiens de l'équation proposée, ou le calcul de la limite supérieure des racines, indique que ces racines doivent être de grands nombres, il conviendra de les réduire à une grandeur médiocre, en faisant $x = my$, m étant 10, 100, ou tel autre nombre qu'on voudra, au moyen duquel les valeurs de y ne puissent contenir que des unités ou des dixaines au plus. De même si les coefficiens de l'équation proposée étaient tellement petits qu'on dût en conclure que les racines sont beaucoup plus petites que l'unité, il faudrait faire $x = \frac{y}{m}$, et prendre m de manière que la plus grande valeur de y pût aller jusqu'à un ou deux chiffres en nombres entiers. La transformation est utile dans le second cas surtout, pour éviter que les racines ne soient rapprochées dans un trop petit espace, et qu'on n'en omette quelqu'une dans les approximations successives.

(76) Nous terminerons ces Recherches par une remarque nécessaire pour compléter la résolution de l'équation omale $c = \varphi(x)$, donnée dans les art. 38 et suiv.

On a supposé tacitement, dans ces articles, que la courbe décrite d'après l'équation $y = \varphi(x)$, était toute concave ou toute convexe vers l'axe, dans la partie soumise au calcul, savoir, depuis $x = 0$ ou $x = k$, jusqu'à $x = r$, r étant l'abscisse du point d'intersection M. Cette propriété en vertu de laquelle la suite k, k', k'', etc. est continuellement croissante vers la limite cherchée r, a lieu dans une infinité de fonctions omales, et notamment dans toutes celles dont on fait usage dans notre seconde méthode. Mais en général la définition des fonctions omales n'exige qu'une seule condition, savoir, que le coefficient différentiel $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ conserve le même signe dans toute l'étendue des x positives. Il peut donc arriver que le coefficient du second ordre $\frac{dd\varphi(x)}{dx^2}$ change une ou plusieurs fois de signe dans la même étendue, et alors la courbe $y = \varphi(x)$ éprouvera une ou plusieurs inflexions ou changemens de courbure. Supposons, par exemple, qu'un changement

de cette sorte ait lieu entre les deux points k' et k'', ce qu'on reconnaîtra par les deux différences $\varphi(k') - c$ et $\varphi(k'') - c$ qui devront être de signes différens; si on continue les calculs d'après les formules des art. 38 et 40, afin d'obtenir la valeur du terme suivant k''', on trouvera $k''' < k''$, de sorte que la suite k, k', k'', k''' cesse d'être croissante après le terme k''.

Cependant si l'on a en même tems $k''' > k'$, on pourra continuer le calcul des termes suivans par les mêmes formules, et on arrivera également au résultat, qui est la limite des termes k'', k''', k^{iv}, etc.

Mais il pourrait arriver qu'on eût $k''' < k'$, et alors en continuant le calcul par les mêmes formules, on s'éloignerait de plus en plus du vrai résultat que l'on cherche. Pour obvier à cet inconvénient, le moyen le plus simple est de joindre les deux points k', k'' par une droite qui coupera la droite CM en un point dont il est facile de déterminer la position. Soit k''' l'abscisse de ce point, on aura

$$k''' = k' + \frac{c - \varphi(k')}{\varphi(k'') - \varphi(k')}(k'' - k'),$$

et k''' sera une valeur très-approchée de la racine r. On continuera ensuite par les formules ordinaires, le calcul des termes suivans $k^{\text{iv}}, k^{\text{v}}$, etc., et la limite de cette suite sera la racine cherchée.

En général les exceptions dont nous venons de parler ne se rencontrent que dans des cas où la résolution se simplifie d'elle-même, puisque sachant que la racine cherchée doit être comprise entre k' et k'', il est facile ensuite de resserrer ces limites à volonté.

Addition au § VIII, IVe Partie, page 394.

Je dois ici faire mention de deux ouvrages très-importans pour la science des nombres, qui ont paru depuis la publication du Traité précédent (*).

M. Chernac, professeur de Philosophie à Deventer, a publié en 1811, sous le titre de *Cribrum Arithmeticum*, une Table où l'on trouve tous les nombres premiers et les diviseurs des autres nombres, depuis 1 jusqu'à un million et plus.

M. Burckhardt s'est proposé ensuite de reculer beaucoup plus loin les limites de cette Table. Il a créé pour cet objet une méthode si simple et si facile, qu'elle lui a fourni en très-peu de tems, une Table contenant le moindre diviseur de tout nombre compris dans le second million. Cette Table a été publiée en 1814.

M. Burckhardt s'est occupé aussitôt d'en dresser une semblable pour le troisième million et même pour le quatrième. La Table construite pour le troisième million est déjà imprimée et ne tardera pas à paraître. Mais avant d'aller plus loin, l'auteur se propose de donner le premier million dans la même forme que les autres, afin de compléter, sous le moindre volume possible, une suite de Tables qui pourra avoir beaucoup d'usages, et qui sera recherchée surtout par les amateurs de l'analyse indéterminée.

La Table de Chernac m'a mis à portée de vérifier les calculs que j'avais faits *à priori*, pour savoir combien il y a de nombres premiers de 1 à 1000000. La théorie m'avait donné 78527, à quelques unités près dont je ne pouvais répondre; la formule de l'art. 389 donnait 78543; l'énu-

(*) *Cribrum Arithmeticum, sive Tabula continens numeros primos, etc., confecit Ladislaus Chernac; Daventriæ* 1811.

Table des diviseurs pour tous les nombres de 1020000 à 2028000; par J.-Ch. Burckhardt. Paris 1814, chez Mme Ve Courcier, quai des Augustins.

mération faite immédiatement d'après le *Cribrum arithmeticum*, a produit 78493 : mais il est possible et même vraisemblable qu'il se soit glissé, dans une si longue énumération, une erreur au moins égale à la différence qu'on trouve entre ce résultat et celui de la formule. Tout ce qu'on doit conclure de là, c'est que la formule a toute l'exactitude nécessaire, et que les différens résultats s'accordent entr'eux beaucoup mieux qu'on n'aurait dû le croire. La Table ultérieure de M. Burckhardt fournira de semblables vérifications dont le succès ne paraît pas douteux, soit pour confirmer l'exactitude de la formule, soit pour lui ajouter un nouveau degré de perfection.

Au reste l'énumération faite dans la Table de Chernac a donné pour chaque centaine de mille, les résultats contenus dans le tableau suivant qui servira de continuation à celui du n° 389, et où l'on remarquera de même l'étonnante conformité qu'il y a entre le résultat de la formule et celui que donnent les Tables.

Limite x.	Nombre y	
	par la formule.	par les Tables.
400000	33854	33863
500000	41533	41538
600000	49096	49093
700000	56565	56535
800000	63955	63937
900000	71279	71268
1000000	78543	78493

FIN DU SUPPLÉMENT.

De l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.



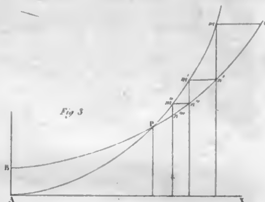


Fig. 3

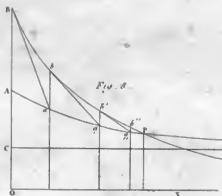


Fig. 8